А. И. Сгибнев

ГЕОМЕТРИЯ НА ПОДВИЖНЫХ ЧЕРТЕЖАХ

Школьные
Математические
Кружки

А. И. Сгибнев

Геометрия на подвижных чертежах

Издательство МЦНМО
Москва, 2019

УДК 51(07)
ББК 22.1
С26

Сгибнев А. И.

С26 Геометрия на подвижных чертежах. — М.: МЦНМО, 2019. — 184 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-1358-2

Девятнадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена решению геометрических задач с помощью программ динамической геометрии — «Геогебра», «Живая математика», «Математический конструктор».

Изучив книгу, школьник научится работать в программе динамической геометрии, строить и изучать подвижные чертежи, освоит основные приёмы математического эксперимента при решении сложных задач — выдвижение, проверка и уточнение гипотез, — а также повторит основные темы и идеи курса планиметрии.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков.

Подборка подвижных чертежей к задачам книги доступна по ссылке https://www.geogebra.org/m/qHxfNbxr

12+

Учебно-методическое издание

Алексей Иванович Сгибнев

Геометрия на подвижных чертежах

Серия «Школьные математические кружки»

Подписано в печать 12.10.2018 г. Формат $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № 7846.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1358-2

Предисловие

⟨Эти задачи⟩ можно решить и без компьютера, но с его помощью сделать это будет быстрее, поскольку всегда проще доказывать факт, в справедливости которого ты уверен.

О.А. Иванов. Элементарная математика.

Раньше самого доказательства надо обладать истиною, справедливость которой предстоит доказывать; обладание же этой истиной достигается при помощи всевозможных приёмов наглядного характера... Когда уже наиболее пытливые ученики начинают обращать внимание на постоянство этого свойства, начинают спрашивать: «Почему это всегда так бывает?», тогда лишь на вопрос «почему» ответом является доказательство.

П.А. Карасёв. Геометрия на подвижных моделях. 1924

Экспериментальная математика. Есть подход к решению задач по математике, который можно назвать экспериментальным. Он состоит в том, что решающий рассматривает частные случаи предложенной конструкции, пытается угадать стоящую за ними закономерность, а потом доказать её в общем виде (подробнее см. [13, 20]). В арифметике, алгебре и комбинаторике это естественно делать с помощью перечней, графиков и таблиц [12]. В геометрии раньше это было возможно с помощью рисования нескольких чертежей или рассмотрения специальных случаев — правильный треугольник вместо произвольного и т. д. (см. также [9, 14]). В последние десятилетия появилось новая возможность: в программах динамической геометрии мы можем нарисовать *всего один* подвижный чертёж, а потом движением мыши получить из него целую серию «обычных» статических чертежей [8]! Тем самым мы легко получаем серию частных случаев, а также видим все возможные варианты конфигурации (остроугольный/тупоугольный треугольник, выпуклый/невыпуклый четырёхугольник/самопересекающаяся ломаная и т. д.), часть из которых легко потерять при статическом рассмотрении.

Роль программ динамической геометрии при решении задач по геометрии можно сравнить с ролью экспериментальной установки в физической лаборатории: с их помощью *школьник может взаимодействовать с предметом напрямую*, без посредства учителя или учебника. Он легко может сам подмечать закономерности, ставить вопросы, выдвигать и проверять гипотезы.

В 1—6 классах школьники получают опыт экспериментального подхода к математике (рассуждение на примерах, обобщение наблюдений).

При изучении геометрии начиная с 7 класса ведущим становится теоретический подход (введение аксиом, определений и доказательство теорем). Однако *продуктивнее не конфликтовать с прежним опытом, а использовать его*, т. е. продолжать развивать и экспериментальные навыки наряду с теоретическими [19].

Благодаря программам динамической геометрии роль математического эксперимента при изучении геометрии может значительно возрасти. В России многие учителя и деятели олимпиадного движения уже активно пользуются такими программами, но они ещё недостаточно проникли в школьную среду, часто используются лишь для иллюстрирования фактов и т. д.

Цель этой книги — помочь учителям ввести экспериментальный подход в геометрии, дать им набор подходящих для этого задач и приёмов исследования.

О подходящих задачах. «Задачи, при решении которых можно и полезно использовать компьютер, должны иметь другую структуру; соответственно, необходимо составлять новые подборки задач и разрабатывать новые методики обучения... При правильном подходе к методике его использования компьютер помогает сделать процесс обучения более интенсивным» [7].

Подходящими я здесь называю задачи, удовлетворяющие двум условиям:

а) они задают подвижный чертёж, который легко построить и по которому нетрудно выдвинуть гипотезу;

б) их трудно решить без подвижного чертежа.

Такими качествами обладают многие традиционные задачи по геометрии, данные в *открытой формулировке* [16, 17], т. е. без готового утверждения (нахождение доказываемого утверждения является в этом случае частью задачи). Здесь это и задачи на экстремум (занятия 4 и 7), и задачи на ГМТ (занятия 2 и 5), и задачи на инвариант (занятие 6).

Но широкий инструментарий программ (о нём чуть ниже) позволяет добавлять и новые типы заданий, например:

— построить подвижный чертёж, задаваемый условием задачи (все главы);

— построить семейство линий и/или их огибающую (задачи 2.1 б), 5.1 б), 5.2, 5.4 б), 5.5, 5.7, Д41—Д44);

— построить, задать в условии или использовать в решении линию, не являющуюся прямой, окружностью или их частью (задачи 5.1, 5.4 а), 5.6, Д20 б), Д22, Д23, Д40 в), г), Д41, Д44, а также потенциально многие задачи занятия 3);

— найти несколько инвариантов или взаимосвязей в подвижной конструкции (задачи 6.3, 6.4, 8.1, Д49, Д53);

— выбрать подходящие случаи в заданном семействе и изучить их (задачи 5.6, 6.5, 6.7, занятия 4 и 7).

Такие задачи могут быть весьма содержательными, а их решение развивающим, но без инструментария программ динамической геометрии они были почти недоступны рядовому школьнику. Теперь они постепенно проникают в обучение геометрии.

Когда опытный математик рисует на бумаге чертёж, он воспринимает его динамически — вместе с его поведением. Научить этому навыку школьника и помогает работа с новыми типами задач в программах динамической геометрии.

Этапы решения. Полный цикл решения задачи в этой книге выглядит так.

А. Прочитать условие.

Б. Построить подвижный чертёж.

В. Провести эксперимент.

Г. Выдвинуть гипотезу.

Д. Подкрепить её (или опровергнуть и начать искать новую гипотезу).

Е. Доказать гипотезу.

Занятия 1—3 соответствуют раннему этапу изучения геометрии, поэтому в них задачи ограничиваются конструктивным уровнем и «инструментальной» проверкой. Точнее, в занятии 1 решение ограничивается этапами А—В (в роли эксперимента выступает проверка чертежа), а в занятиях 2 и 3 — этапами А—Д (при этом гипотеза в занятии 3 выдвигается не в словесной формулировке, а в виде построения, а подкрепление происходит при проверке того, что построенная линия совпадает со следом).

Начиная с занятия 4 в задачах требуется полный цикл решения с доказательствами (кроме задач, помеченных *). Соответственно, в занятиях 4—8 у каждой задачи есть две части решения. Первая часть называется *экспериментом*, она охватывает этапы А—Д — описывается построение подвижного чертежа, выдвигается и подкрепляется гипотеза, высказываются разные неформальные соображения. Вторая часть называется собственно *решением*, она соответствует этапу Е, т. е. решению задачи в классическом смысле.

Выдвижение и подкрепление гипотезы — ключевые этапы, остановимся на них подробнее. Гипотезы обычно выдвигают на основании *непосредственных наблюдений* (вам показалось, что точка C — середина отрезка AB). Здесь важно сделать чертёж хорошо «читаемым». Первый шаг подкрепления — *выполнить более точное измерение/построение* (вы измеряете и сравниваете отрезки AC и CB или строите середину отрезка AB). Второй шаг подкрепления — *охватить большее число случаев* (вы варьируете отрезок AB, а точка C по-прежнему остаётся его серединой).

Зачем нужно подкреплять гипотезы? Во-первых, чтобы сразу забраковать неверную гипотезу и не тратить время на попытки её доказать. Во-вторых, качественная проверка гипотезы часто приводит к идее решения (дополнительным построениям, обнаружению важных случаев, уточнению гипотезы и т. д.). Наконец, сам приобретаемый навык подкрепления гипотезы очень полезен[1].

Отметим, что в программах международного бакалавриата по математике предусмотрен специальный вид деятельности — Investigating patterns (поиск закономерностей). Работа с математическими фактами там описывается тремя глаголами:

— verify (проверить частный случай);

— justify ($\approx$ обосновать, подтвердить);

— prove (доказать).

Наше подкрепление гипотез примерно соответствует стадии justify.

Команды/инструменты и заготовки. Широко распространён подход, при котором школьники проводят эксперименты на выданных им заготовках. В этой книге подход другой — *школьники сами строят подвижный чертёж по условию задачи.*

В задачах на построение циркулем и линейкой разрешается использовать лишь те построения, которые мы предварительно сконструировали из элементарных (см., например, [3], так же устроена программа «Евклидия» [web4]). Эта традиция соответствует аксиоматическому построению курса геометрии, при котором можно ссылаться только на доказанные теоремы. В этой книге для построения подвижных чертежей *разрешается пользоваться всеми доступными командами/инструментами программ динамической геометрии*, в том числе и несводимыми к построениям циркулем и линейкой (например, можно выполнить трисекцию угла или построить правильный семиугольник). Это соответствует «инженерному» подходу, при котором способы построения являются лишь средством, ускоряющим продвижение к цели — изучению свойств подвижного чертежа.

План курса. Задачи сгруппированы по главам, в каждой из которых развиваются особые экспериментальные навыки и почти в каждой вводятся новые команды/инструменты программ.

---

[1]Заметим, что на олимпиадах по информатике проверка алгоритмов, предложенных школьниками, не является математической в строгом смысле этого слова. Вместо этого алгоритмы тестируют на разнообразном массиве входных данных. Это похоже на подкрепление гипотез, предлагаемое в данной книге.

Подробности показаны в таблице.

Экспериментальным навыкам, как и всяким другим, надо учить от простого к сложному. Поэтому степень открытости задания, включённости ученика в создание материала увеличивается от первого занятия к восьмому (см. пятый столбец таблицы).

Из таблицы также видно, что занятия не очень «плотно» привязаны к конкретным темам курса геометрии (см. третий столбец). Это не только недостаток, но и достоинство. Во-первых, школьникам полезно иногда встречаться на одном занятии с несколькими темами — ведь на олимпиадах и экзаменах им приходится это делать. Во-вторых, на каждом занятии вполне допустимы одна-две задачи «на вырост», в которых школьник может построить подвижный чертёж и сформулировать гипотезу, но ещё не имеет средств её доказать. *Такие задачи помечаются знаком* *. К ним полезно возвращаться позже, опираясь на выдвинутые гипотезы. Это даёт учителю возможность манёвра, особенно если на кружок приходят ученики из разных классов с разной программой.

Организация занятий. Каждое занятие рассчитано на 90 минут. Занятия удобно проводить в компьютерном классе. Первые 10—20 минут компьютеры выключены, но включен проектор и учитель демонстрирует на экране эксперимент и решение «задач для разбора». Параллельно он показывает нужные команды/инструменты программы. Далее школьники получают листочки с задачами для самостоятельного решения и решают их за компьютерами, а учитель принимает задачи, подсказывает тем, кто попал в тупик. Школьник может за каждую задачу получить два «плюса» — за эксперимент и за решение. Если школьник ошибся в решении, учитель указывает ему на ошибку или пробел в рассуждениях. А если школьник выдвигает неверную гипотезу, то учитель советует найти опровергающую её конфигурацию. Опровержение гипотезы, полученное учеником самостоятельно, особенно ценно.

В конце занятия полезно подвести итог и обсудить решения одной-двух задач, вызвавших сложности. Можно про-

Номер и тема главы	Классы	Геометрическое содержание	Новые команды / инструменты программ	Новые экспериментальные навыки
1. Строим подвижные чертежи	7	«Геометрические конструктивы» — как с помощью данного набора инструментов построить требуемый подвижный чертёж	Понятия предка и потомка. Основные построения	Построить подвижный чертёж, проверить его, выделить фиксированные и подвижные элементы
2. Строим траектории точек и линий	7	«Геометрические конструктивы», выражение новых элементов через фиксированные	След точки и линии	Построить траекторию точки, выдвинуть гипотезу о её виде, подкрепить гипотезу построениями
3. Метод освобождения точки	7—8	«Геометрические конструктивы», пропедевтика преобразований плоскости		Освободить точку, построить её траекторию, сделать прикидку, эскиз, выдвинуть гипотезу о траектории
4. Измерения на чертеже. Минимумы и максимумы-1	8	Неравенство треугольника, перпендикуляр короче наклонной, средняя линия трапеции, площадь треугольника	Измерение длин, арифметические действия с длинами	Выбрать подходящий чертёж в серии, найти особенности, выделяющие его среди других. Подкрепить гипотезу измерениями и построениями
5. Оживляем траектории	8—9	Параллелограмм, средняя линия треугольника и трапеции, вписанный угол, гомотетия*	Оживление следа точки и линии	Построить траекторию подвижной точки или линии, найти огибающую. Подкрепить гипотезу рассмотрением многих случаев
6. Ищем взаимосвязи и инварианты	8—9	Равенство и подобие треугольников, четырёхугольники, средние линии, вписанный угол, теорема о медианах, гомотетия		Найти общее свойство серии чертежей, выделить нужный случай или множество случаев
7. Минимумы и максимумы-2	9	Движения плоскости, вписанные углы, обобщённая теорема синусов, метод координат	Преобразования плоскости, визуализация переменных величин	Построить найденную конфигурацию, прийти к доказательству
8. Открытые задачи. Конференция	9	Движения и гомотетия, теорема косинусов, векторы, средние линии, счёт углов		Найти несколько общих свойств серии чертежей, взаимосвязи между конструкциями

демонстрировать на экране интересный чертёж или оригинальное решение, возникшее по ходу занятия.

Иногда в группе встречаются один-два школьника (как правило, очень сильные), которые не любят проводить эксперименты, а хотят сразу доказывать «на бумаге». Можно дать им индивидуально более сложные задачи (например, из списка дополнительных задач), которые без подвижных чертежей им будет трудно осилить.

Чтобы школьники не забывали программу динамической геометрии в течение долгого перерыва между посвящёнными ей занятиями кружка, полезно раз в месяц давать на дом отдельные задачи для решения в этой программе. Построенные дома электронные чертежи школьники могут отправлять учителю или загружать в общее интернет-пространство, где все смогут их видеть и комментировать. Это хорошо вписывается в модное направление «смешанного обучения».

Программы. Сейчас в России популярны три программы динамической геометрии: «Геогебра» [web1], «Живая математика» [web2] и «Математический конструктор» [web3]. *Приведённые здесь наборы задач можно решать в любой из трёх программ.* В конце книги приведён словарик основных команд и инструментов для всех трёх программ.

Готовые подвижные чертежи и постановки задач. Традиционно в геометрии используются готовые (статические) чертежи, в том числе для постановки задач без слов [1, 11] или для доказательств типа «смотри». Чертежи позволяют экономить время, запоминать и активизируют визуальное восприятие. Подвижные чертежи дают и другие возможности, например, позволяют наглядно демонстрировать процессы, используют тактильное восприятие.

В некоторых задачах (1.1, 2.2, 5.4, 6.1, 7.2, 8.3 — они *помечены в тексте буквой «ч» после номера*) можно вместо текстового условия дать ученикам готовый подвижный чертёж, что позволит разнообразить занятие и научит школьников самостоятельно формулировать задачи.

Благодарности. При написании книги автор многократно прибегал к помощи С. А. Беляева, В. Н. Дубровского, К. А. Кнопа, Г. А. Мерзона и Д. Э. Шноля. Т. Н. Ильичёва и

Н. М. Нетрусова провели несколько занятий по главам книги. А. А. Гаража, А. А. Деева, В. А. Иевлева и Е. А. Коноваленко вычитали текст. Е. В. Бакаев, В. М. Бусев, М. А. Волчкевич, А. А. Заславский, А. В. Пантуев и Ю. Н. Торхов дали ценные советы. Традиционная большая благодарность — редакторам серии А. Д. Блинкову и А. В. Шаповалову.

Поддержка курса. По ссылке

`https://www.geogebra.org/m/qHxfNbxr`

можно найти электронное приложение к книге — подборку подвижных чертежей (в «Геогебре») ко всем задачам глав 1—8. Также для поддержки курса создана группа в «Геогебре» — там публикуются подвижные чертежи, новые задачи, обсуждаются построения и решения, можно задать вопросы, предложить свои материалы и т. д. Чтобы войти в группу, надо зарегистрироваться на geogebra.org, пройти по ссылке geogebra.org/groups и ввести код TEJ9P.

На рисунках к экспериментам *все подвижные точки изображены «пустыми», все фиксированные точки — закрашенными.*

Занятие 1
Строим подвижные чертежи

Подвижные чертежи — мощный инструмент для решения геометрических задач. Однако построение правильного подвижного чертежа к задаче часто само по себе оказывается интересной геометрической задачей! На этом занятии мы будем учиться строить различные подвижные чертежи, а использовать их начнём со следующего занятия.

Откуда берётся подвижность чертежа? Дело в том, что в каждой задаче этого занятия условия задают не одну фигуру, а целое семейство фигур. В фигуре есть фиксированные элементы и подвижные элементы (точки, отрезки, прямые, окружности и т. д.). Решением задачи считается правильный подвижный чертёж. Проверка чертежа осуществляется так.

1. *При перемещении подвижного элемента фиксированные элементы должны оставаться на месте.*

2. *При перемещении подвижного элемента можно получить последовательно всё семейство фигур, удовлетворяющих условиям задачи.*

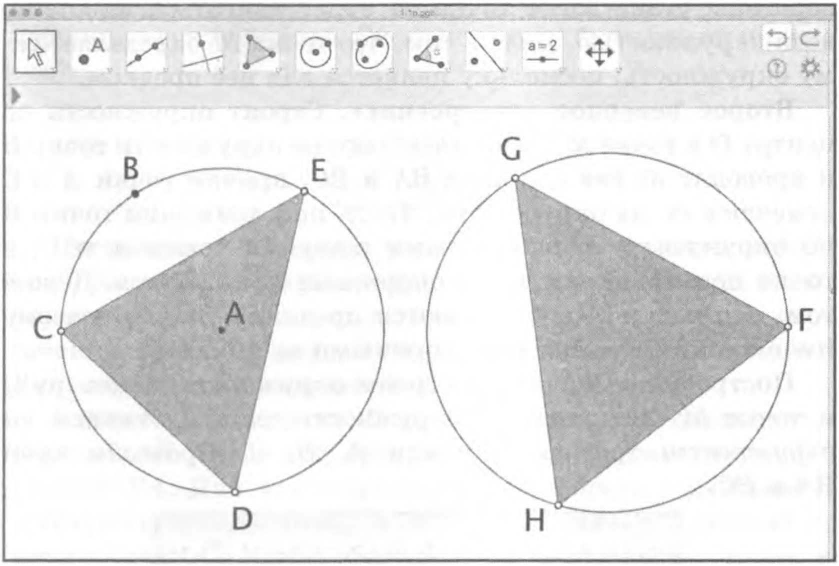
1 (ч). а) Постройте треугольник, вершины которого лежат на фиксированной окружности.

б) Проведите окружность через три вершины фиксированного треугольника.

Построение. а) Проведём окружность с центром A, проходящую через точку B, построим на ней три точки C, D, E, отметим треугольник с вершинами C, D, E.

б) Построим треугольник FGH, проведём окружность через три его вершины.

Проверка. Статические чертежи к этим задачам выглядят одинаково, однако подвижные чертежи ведут себя совершенно по-разному! Если пошевелить вершины треугольника, то в задаче а) они будут «бегать» по непо-



движной окружности, а в задаче б) будут двигаться как угодно, изменяя при этом саму окружность. В задаче а) надо зафиксировать окружность, для чего мы строим сначала её, а потом уже треугольник. В этом случае говорят, что окружность является *предком*, а треугольник — её *потомком*. В задаче б), наоборот, надо зафиксировать треугольник. Для этого мы сначала строим треугольник, а потом проводим окружность. В этом случае треугольник является *предком*, а окружность — его *потомком*.

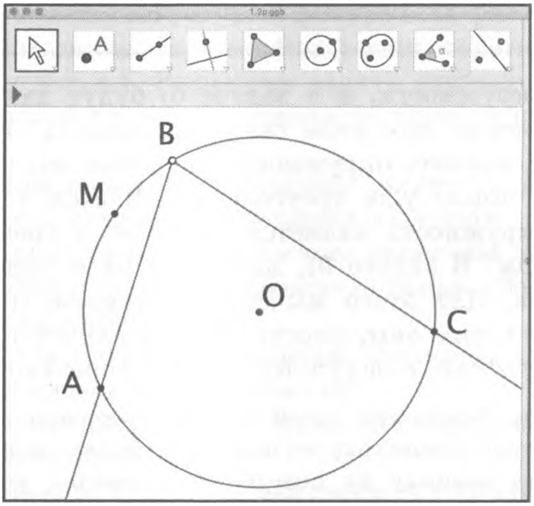
Замечание. Возможен такой порядок решения этой задачи: сначала учитель демонстрирует школьникам два готовых чертежа и показывает разницу их поведения, «шевеля» вершины треугольников. Потом учитель вводит иерархию «предки-потомки» и вместе со школьниками строит аналогичные чертежи.

2. В фиксированную окружность впишите угол, опирающийся на фиксированную дугу (это значит, что точки пересечения сторон угла с окружностью фиксированы, а вершина угла «бегает» по окружности).

Первое неверное «построение». Строят окружность по центру O и точке M, затем выбирают точку M в качестве вершины угла. Тогда точка M будет двигаться вместе со всей окружностью. Дело в том, что точка M определяет саму окружность, поскольку является для неё предком.

Второе неверное «построение». Строят окружность по центру O и точке M, затем отмечают на окружности точку B и проводят из неё два луча BA и BC, причём точки A и C отмечают не на окружности. Тогда при движении точки B по окружности неподвижными остаются точки A и C, а точки пересечения лучей с окружностью движутся. Дело в том, что точки A и C являются предками лучей, поэтому именно они остаются неподвижными на лучах.

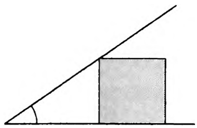
Построение. Сначала построим окружность по центру O и точке M, лежащей на окружности, *затем* отметим *на окружности* три новые точки A, B, C. Проведём лучи BA и BC.



Проверка. Будем двигать точку B. Она движется по окружности, окружность фиксирована, точки A и C тоже.

Замечание. Здесь хитрость состоит в том, что все три точки A, B, C надо отмечать на уже готовой окружности, тогда они будут потомками для окружности.

3. Зафиксирован острый угол. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — внутри угла. Сколько может быть таких квадратов?



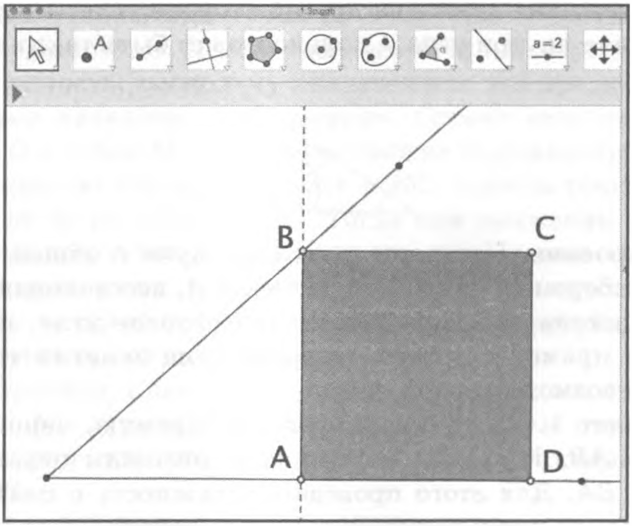
Построение. Построим угол (два луча с общей вершиной). Выберем на стороне угла точку A, восстановим из неё перпендикулярную прямую к этой стороне угла, на пересечении прямой с другой стороной угла отметим точку B. Дальше возможны варианты.

Вариант 1. Из точки B проведём прямую, перпендикулярную AB, и на ней внутри угла отложим отрезок BC, равный BA. Для этого проведём окружность с центром B, проходящую через точку A, и на пересечении с прямой отметим точку C. После этого скроем окружность, чтобы не загромождать чертёж (если мы *скрываем* объект, то его потомки продолжают отображаться, а если *удаляем*, то все потомки исчезают вместе с ним). Через точку C проведём прямую, параллельную BA, на пересечении с первой стороной угла отметим точку D. Отметим $ABCD$ как многоугольник и скроем вспомогательные прямые, чтобы чертёж хорошо «читался». (Для удобства проверки иногда лучше не скрывать вспомогательные объекты, а отмечать их пунктиром, бледным цветом и т. д. В случае необходимости можно показать все скрытые объекты.)

Вариант 2. Воспользуемся готовым инструментом и на отрезке BA построим квадрат.

Проверка. Перемещая точку A по стороне угла, будем для каждого её положения получать свой квадрат.

Замечание. Что будет, если потянуть чертёж за точку-потомка (например, B, C или D)? В «Геогебре» ничего не изменится. В «Живой математике» и «Математическом конструкторе» весь чертёж сдвинется как целое, не «деформируясь». Мы будем считать, что чертёж в любой программе не зависит от потомков. Очевидно, *фиксированные элементы надо строить раньше, чем подвижные, которые от них зависят.*

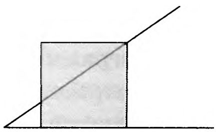


Задачи для самостоятельного решения

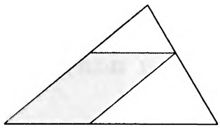
Ученики выполняют подвижные чертежи на компьютере, учитель принимает их. Способ проверки чертежа учителем изложен в специальном разделе каждой задачи. Полезно при проверке демонстрировать удобства качественного оформления чертежа («эту линию скроем, а эту выделим другим цветом — теперь легко видна ошибка»).

Указания школьникам. Чертёж должен хорошо читаться — используйте разные цвета, толщину линий, скрывайте вспомогательные линии. Буквы на чертеже должны быть такими же, как в условии.

4. Зафиксирован угол меньше 45 градусов. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — *вне угла*. Сколько может быть таких квадратов?

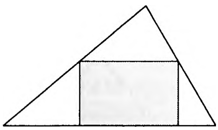


5. *Параллелограммом* называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны. Впишите в фиксированный треугольник ABC параллелограмм так, что одна его вершина совпадает с вершиной A исходного треугольника, а другие три лежат на его сторонах. Сколько может быть таких параллелограммов для данного треугольника?



6. *Хордой* называют отрезок, концы которого лежат на окружности. Постройте две взаимно перпендикулярные хорды фиксированной окружности, проходящие через фиксированную точку внутри окружности (не совпадающую с центром).

7. Впишите в фиксированный остроугольный треугольник ABC прямоугольник так, чтобы одна сторона прямоугольника лежала на отрезке AB, а две оставшиеся вершины — на отрезках AC и BC.

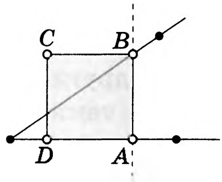


8. Постройте квадрат с фиксированным центром.

9*. Постройте правильный (равносторонний) треугольник с фиксированным центром.

Построения

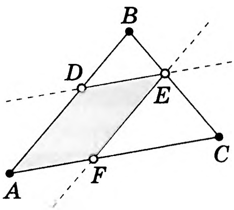
4. Сначала строим фиксированные элементы, в данном случае угол. Выберем на стороне угла точку A, восстановим из неё перпендикулярную прямую к стороне угла, на пересечении прямой с другой стороной угла отметим точку B. Далее можно воспользоваться готовым инструментом и на отрезке AB построить квадрат $ABCD$, а затем скрыть прямую AB.



Проверка. Перемещая точку A по стороне угла, будем для каждого её положения получать свой квадрат. Точки B, C, D не влияют на чертёж.

Замечание. Если при построении квадрата выбрать точки A и B в неправильном порядке, то получим квадрат с четвёртой вершиной внутри угла, как в задаче 3.

5. Начертим треугольник ABC. Отметим на стороне AB точку D, проведём через неё прямую, параллельную стороне AC. На пересечении прямой со стороной BC отметим точку E. Из точки E проведём прямую, параллельную AB, на пересечении со стороной AC отметим точку F. Отметим параллелограмм $ADEF$ как многоугольник и выделим его цветом, отличным от цвета треугольника ABC. Можно также скрыть прямые DE и EF.

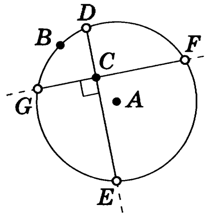


Проверка. Перемещая точку D по стороне, будем для каждого её положения получать свой параллелограмм, вписанный в треугольник. От точек E и F ничего не зависит.

Замечание. Можно в качестве «стартовой» выбирать точку на стороне AC и даже на стороне BC. В последнем случае можно через одну точку провести сразу обе прямые, параллельные сторонам.

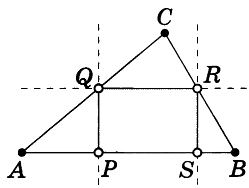
6. Сначала построим окружность (по центру A и точке B, лежащей на окружности), внутри неё отметим точку C.

Затем проведём луч DC с вершиной D на окружности. На втором пересечении его с окружностью отметим точку E. Проведём хорду DE и скроем луч DC. Через точку C проведём прямую, перпендикулярную к DE, она пересечёт окружность в точках F и G. Проведём хорду FG и скроем прямую FG.



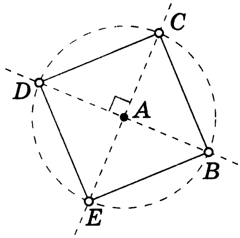
Проверка. При движении точки D по окружности обе хорды вращаются вокруг точки C, не меняя окружности! Точки E, F, G не влияют на чертёж.

7. Построим треугольник ABC с острыми углами A и B. Отметим на стороне AB произвольную точку P, проведём через неё прямую, перпендикулярную к AB. На пересечении прямой со стороной треугольника (пусть это будет сторона AC) отметим точку Q. Проведём через Q прямую, параллельную AB, на пересечении со стороной BC отметим точку R. Из R проведём прямую, перпендикулярную AB, на пересечении с AB поставим точку S. Построим четырёхугольник $PQRS$. Присвоим ему цвет, отличный от цвета треугольника ABC, скроем вспомогательные прямые.



Проверка. При движении точки P по отрезку AB прямоугольник движется, сохраняя прямые углы и оставаясь вписанным в треугольник ABC. При шевелении точек Q, R, S прямоугольник не изменяется.

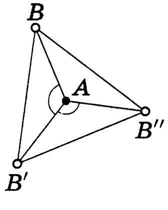
8. Отметим точку A — будущий центр. Инструмент «Квадрат» применить не получится, поскольку он строит квадрат по данной стороне. Воспользуемся тем, что диагонали квадрата пересекаются в его центре под прямым углом. Проведём прямую AB и проведём через точку A перпендикулярную ей прямую. Проведём окружность с центром в точке A, проходящую через точку B. Две прямые пересекут окружность в точках B, C, D, E. Отметим многоугольник с вершинами в этих точках. Это и будет искомый квадрат. Теперь можно сделать пунктирными окружность и прямые AB и AC.



Проверка. При движении точки B меняется размер квадрата, он поворачивается относительно точки A, но точка A остаётся центром.

Замечание. У квадрата есть две «степени свободы» — размер и ориентация. И то и другое должно меняться! Также возможно построение, при котором размер квадрата будет зависеть от одной точки, а угол поворота — от другой.

9*. Отметим точку A — будущий центр. Как и в предыдущей задаче, готового инструмента нет. Воспользуемся тем, что отрезки, соединяющие вершины правильного треугольника с его центром, образуют углы по $120°$. Проведём отрезок AB. Повернём его относительно точки A на угол $120°$, появится отрезок AB'. Проделаем с отрезком AB' ту же операцию, появится отрезок AB''. Отметим треугольник с вершинами в точках $BB'B''$. Это и будет искомый треугольник.



Проверка. При движении точки B треугольник меняет размер и вращается вокруг точки A, однако A остаётся центром.

Замечание. В свете этого решения предыдущую задачу 8 можно решить, построив отрезок AB и трижды последовательно повернув его на 90° относительно точки A.

Другой подход — построить произвольную окружность с центром A, построить на ней правильный шестиугольник с помощью шести равных окружностей, и отметить его вершины через одну.

В конце занятия полезно продемонстрировать дальнейшие возможности построенных чертежей: спросить, как изменяется угол ABC в задаче 2 при движении точки B, и измерить его (см. задачу Д46); спросить, по какой траектории движется точка C в задаче 3 и построить её след (см. задачу 3.2); спросить, у какого параллелограмма в задаче 5 площадь наибольшая, измерить её и найти точку E, соответствующую максимуму (см. задачу Д30). Это мотивирует школьников на дальнейшую работу с динамической геометрией.

Общее замечание для учителя. Сравнение задач на построение подвижных чертежей, приведённых в этом занятии, с традиционными задачами на построение, обычно решаемыми в 7 классе, приведено в таблице.

Категория задач	В чём состоит задача	Какими инструментами можно пользоваться	Определённость решения
Традиционные задачи на построение	Построить фигуру, в которой указанные элементы равны данным	Циркуль и линейка	Решение определено однозначно (или имеется конечное множество решений)
Задачи на построение подвижных чертежей	Построить подвижную фигуру, в которой указанные элементы фиксированы	Все инструменты программ динамической геометрии (параллельная прямая, перпендикуляр, квадрат и т. д.)	Есть семейство решений

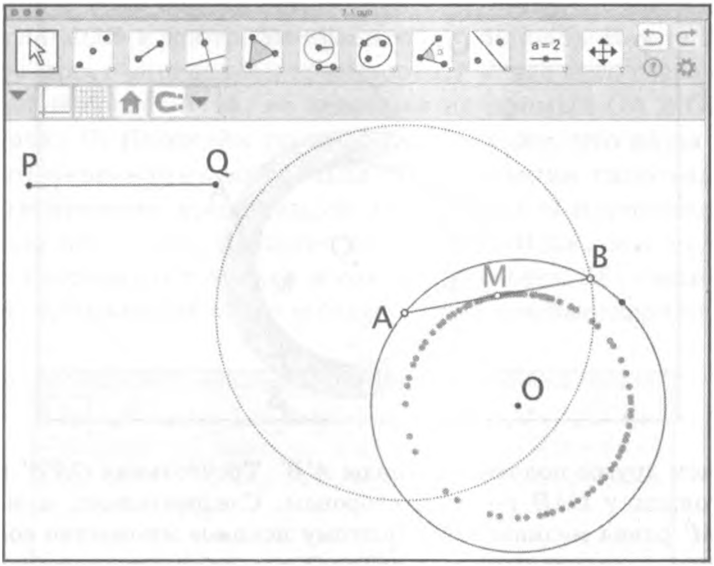
См. также дополнительные задачи Д1—Д9.

Занятие 2
Строим траектории точек и линий

На этом занятии мы научимся использовать один из мощных инструментов динамической геометрии — *построение следа*. Это позволит нам достаточно рано ввести важнейшее понятие *множества точек* и поработать с ним пропедевтически, без доказательств (задачи на множества точек с доказательствами мы будем решать на занятии 5). Программы динамической геометрии позволяют рисовать след не только точки, но и линии. Это открывает новые возможности для геометрического эксперимента — например, легко можно построить *семейство* линий (задача 1 б)) и т. д.

1. Найдите в данной окружности множество а) середин хорд данной длины, б) хорд данной длины.

Эксперимент. а) Если вы экспериментируете на листе бумаги, вам придётся нарисовать несколько хорд (чем больше — тем лучше). А если в программе, то достаточно построить одну и потом двигать её. Чтобы построить хорду фиксированной длины, используем шаблон. Построим окружность с центром O и отрезок PQ отдельно от неё, этот отрезок-шаблон будет задавать длину нашей хорды. Отметим на нашей окружности точку A (это не должна быть точка-предок окружности!) и проведём окружность радиуса PQ с центром A. Одну из точек пересечения окружностей назовём B, после чего скроем новую окружность, чтобы не загромождать чертёж. Построим отрезок AB и отметим его середину M. Двигая точку A по исходной окружности, получим движение хорды AB при постоянстве её длины. Пусть точка M оставляет след. Проведя точкой A по окружности, получаем след, похожий на окружность. Какая это окружность? В условиях задачи зафиксирована только одна точка — центр окружности O. Похоже, что у нас получилась *окружность с тем же центром, что и* *данная, проходящая через точку М.* Это предположение сделано «на глазок». Чтобы проверить его точнее, построим окружность по центру O и точке M — она совпадёт со следом. Тем самым мы подкрепили нашу гипотезу[1].



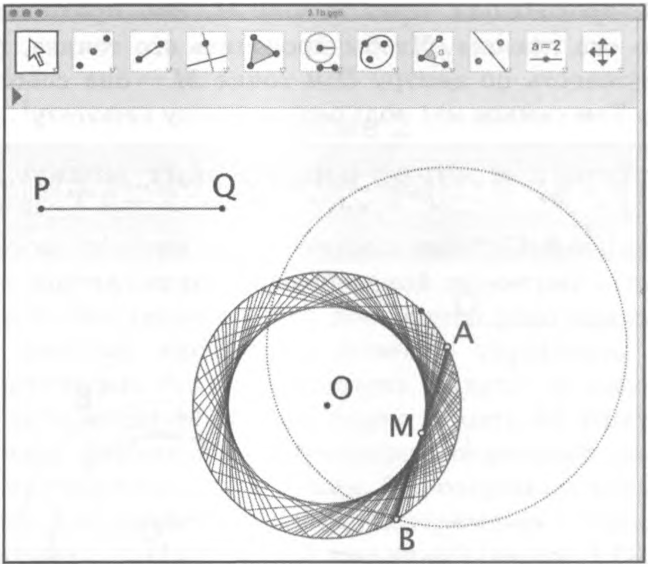
б) Теперь попросим саму хорду AB оставлять след и совершим точкой A оборот по окружности — хорда закрашивает некоторую двумерную область. (Линию, оставляющую след, удобно предварительно перекрасить в светлый тон, чтобы чертёж не слишком затемнялся.)

Глядя на границу этой области, поймём, что закрашено *кольцо между двумя концентрическими окружностями*, одна из которых дана в условии, а вторая образована траекторией точки M.

Замечание. Результат пункта а) легко доказать средствами 7 класса. Пусть O — центр исходной окружности, R — её радиус. Тогда треугольник OAB равнобедренный, OM — его медиана.

---

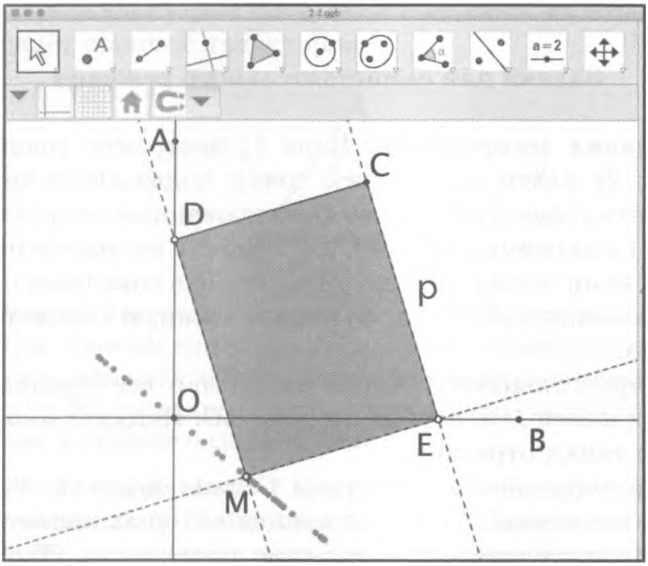
[1]Мы говорим о *подкреплении* гипотезы, а не о её подтверждении во избежание путаницы. Дело в том, что в естественных науках говорят, что гипотеза подтверждена, когда в математике говорят «гипотеза доказана». Мы же здесь не доказали гипотезу, а только проверили её для частного случая, т. е. сделали «более убедительной».



Возьмём другое положение хорды $A'B'$. Треугольник $OA'B'$ равен треугольнику OAB по трём сторонам. Следовательно, и медиана OM' равна медиане OM. Поэтому искомое множество состоит из точек, равноудалённых от точки O, т. е. является окружностью, концентрической данной.

2 (ч). Даны две перпендикулярные прямые OA и OB и точка C внутри угла AOB. Рассмотрим все такие прямоугольники $CDME$, что вершина D лежит на прямой OA, а вершина E — на прямой OB. Найдите множество точек M.

Эксперимент. Построим указанные прямые OA и OB и точку C. Понятно, что точку D на прямой OA можно выбрать произвольно, а дальше прямоугольник $CDME$ достраивается однозначно. Отметим на прямой OA произвольную точку D, построим отрезок CD и перпендикулярную ему прямую p через точку C. Точку пересечения прямых p и OB назовём E. Проведём через E прямую, параллельную CD, а через D — прямую, параллельную CE. Точку их пересечения назовём M. Отметим четырёхугольник $CDME$, а вспомогательные прямые скроем. Попросим точку M оставлять след и будем двигать точку D по прямой OA. Получим след, похожий на прямую. Что можно сказать про эту прямую? Она проходит через точку O. Может быть, это биссектрисы вертикальных углов, образованных пересечением OA и OB? Построим биссектрисы и увидим, что они не совпадают с прямой (а если совпадают, то сдвинем точку C с биссектрисы угла AOB и построим траекторию заново). Какие параметры могут определять траекторию? У нас есть всего одна фиксированная точка, не лежащая на прямых OA и OB, — это точка C. Проведём прямую OC. Похоже, что наша прямая ей перпендикулярна. Для подкрепления гипотезы построим прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную OC, — она совпадёт со следом. Итак, мы подкрепили гипотезу о том, что ***множество точек M — это прямая k, проходящая через точку O и перпендикулярная CO.***



Задачи 3—5 и 7 этого занятия сформулированы на языке множеств («рассматривают все отрезки, найдите множество их середин»), а задача 6 — на «динамическом» языке («вершина бегает по окружности, найдите траекторию точки»). Ученики должны научиться переводить задачу с языка мно-

жеств на «динамический» язык и строить соответствующий подвижный чертёж.

Если ученик формулирует неполную гипотезу, надо задать уточняющий вопрос: «Какая именно окружность?», «Где лежат концы отрезка?». Обратите его внимание на исходные данные задачи: «Какие точки в задаче неподвижны? Выразите ответ через них».

При этом формируется навык однозначно описывать словами наблюдаемые явления — он очень помогает в работе с определениями и формулировками теорем.

Если гипотеза неверна, лучше продемонстрировать это не словами, а вариациями чертежа (например, если в задаче 7 школьникам показалось, что искомое множество точек лежит на высоте треугольника, то полезно построить это множество для треугольника, «далёкого от равнобедренного»).

Задачи для самостоятельного решения

Указания школьникам. Надо 1) построить подвижный чертёж; 2) найти траекторию точки подвижного чертежа; 3) описать траекторию через фиксированные элементы чертежа; 4) выдвинув гипотезу, подкрепить её: построить указанную вами линию и проверить, что она совпадает с траекторией подвижной точки; 5) подкреплённую гипотезу сдать учителю.

3. В треугольнике ABC рассматривают все отрезки BD, у которых конец D лежит на стороне AC. Найдите множество середин таких отрезков.

4. На окружности с центром O дана точка A. Рассматривают все хорды, одним из концов которых является точка A. Найдите множество середин таких хорд. (В отличие от задачи 1, здесь длина хорды меняется!)

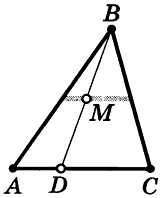
5. Даны точки A и B. Рассматривают все прямые BC, проходящие через точку B, и перпендикуляры, опущенные на них из точки A. а) Найдите множество точек D — оснований перпендикуляров. б) Найдите множество точек E, симметричных точке A относительно всех прямых BC.

6. Дана окружность, на ней зафиксированы точки A и B и «бегает» точка C. Найдите траекторию точки пересечения высот треугольника ABC.

7. В данный остроугольный неравнобедренный треугольник вписывают все прямоугольники, у которых две вершины лежат на основании и по одной — на боковых сторонах. Найдите множество точек пересечения диагоналей этих прямоугольников.

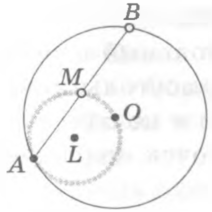
Эксперименты

3. Начертим указанные треугольник ABC и отрезок BD и построим точку M — середину отрезка BD. Попросим точку M оставлять след. Подвинем точку D от A до C. Точка M нарисует траекторию, похожую на *отрезок, соединяющий середины сторон BA и BC*. Для подкрепления гипотезы отметим середины сторон BA и BC и соединим их отрезком — он совпадёт с нашей траекторией.



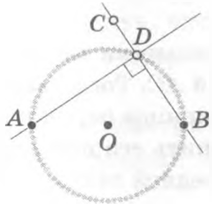
Замечание. Также школьники могут выдвинуть гипотезу, что это отрезок, параллельный AC. Тогда можно добиться от них уточнения о том, что один из концов отрезка лежит на середине стороны AB или BC, и подкрепить его построением. Заодно получится подготовка к теореме о средней линии.

4. Строим окружность с центром O, проводим хорду AB, строим её середину M, просим точку M оставлять след. Двигаем хорду за конец B, пока она не «заметёт» всю окружность. Траектория точки M похожа на окружность. Какую именно окружность? Изначально в задаче зафиксированы всего две точки — A и O. Похоже, что это *окружность, построенная на отрезке AO как на диаметре*. Для подкрепления этой гипотезы проведём отрезок AO, отметим его середину L и построим окружность с центром L, проходящую через точку A. Эта окружность совпадёт с нашей траекторией!

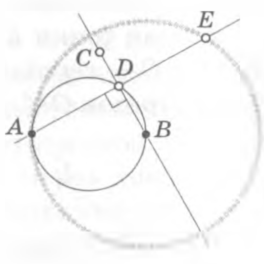


Замечание. Можно положение центра траектории не угадывать, а определить «инструментально», построив окружность по трём точкам — A, O и середине M произвольной хорды AB, отличной от диаметра.

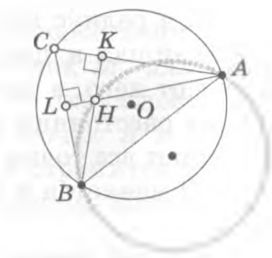
5. а) Отметим точки A и B, проведём через B прямую BC, построим из точки A к BC перпендикулярную прямую, отметим основание перпендикуляра D и попросим точку D оставлять след. Будем вращать прямую BC за точку C (вокруг точки B). Траектория точки D похожа на *окружность, построенную на отрезке AB как на диаметре*. Для подкрепления гипотезы отметим O — середину отрезка AB и построим окружность с центром O, проходящую через точку A. Она совпадёт с нашим следом.



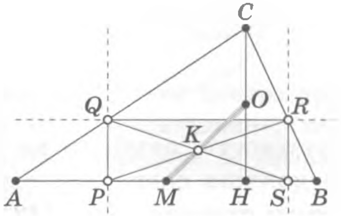
б) Используем чертёж к пункту а). Точку E построим, продлив отрезок AD на его длину. Для этого проведём окружность с центром D, проходящую через точку A, вторую точку пересечения прямой AD с окружностью назовём E, попросим её оставлять след. Окружность скроем, чтобы не загромождать чертёж. При вращении прямой BC вокруг точки B получим траекторию, похожую на *окружность с центром B, проходящую через точку A*. Для подкрепления гипотезы построим такую окружность — она совпадёт со следом.



6. Построим окружность, отметим на ней три точки A, B и C (точка C не должна совпадать с точкой — предком окружности!), отметим треугольник ABC. Проведём высоты AL и BK (почему достаточно двух?) — для этого построим перпендикулярные прямые из точки A к BC и из точки B к AC, соединим отрезками вершины с основаниями перпендикуляров и скроем прямые. Назовём точку пересечения высот H, попросим её оставлять след. Будем двигать точку C по окружности и смотреть на траекторию точки H. Она похожа на *окружность, проходящую через точки A и B и того же радиуса, что и исходная окружность*. Для подкрепления гипотезы можно выбрать окружность указанного радиуса и совместить её с траекторией (соответствующий инструмент есть в «Геогебре» и «Матконструкторе»). Или же отобразим исходную окружность симметрично относительно прямой AB — полученная окружность совпадёт с траекторией.



7. Построение аналогично задаче 1.7. Перемещая точку P по отрезку AB, заметим, что в одном граничном положении прямоугольник совпадает с основанием треугольника AB, а в другом — с высотой CH. Проведём диагонали PR и QS, отметим точку их пересечения K, попросим её оставлять след. Траектория точки K похожа на *отрезок OM, где M — середина AB и O — середина CH*. Для подкрепления гипотезы построим отрезок OM — он совпадёт со следом.



* * *

Это занятие посвящено технике эксперимента, поэтому задачи для него отбирались на основании конструкций, а не доказательств. К этим задачам полезно возвращаться, когда у школьников появятся средства для доказательств гипотез. На этот случай ниже приведены решения задач. Для краткости доказательства приводятся только в одну сторону: доказано включение искомого множества точек в множество точек фигуры, указанной в ответе, но не доказано, что каждая точка фигуры из ответа принадлежит искомому множеству (исключение составляет задача 2, в которой это доказательство нетривиально).

1. а) См. замечание после задачи. б) Обозначим радиус исходной окружности R, а радиус новой — r. На данной хорде AB точка M — ближайшая к центру окружности — находится на расстоянии r от него, а точки A и B — самые удалённые от точки O — на расстоянии R. Когда хорда делает оборот, её точки заметают все точки плоскости, расстояние от которых до точки O меняется в пределах от r до R, т. е. указанное кольцо.

2. 1. Докажем, что вершина M прямоугольника лежит на прямой k. Пусть P — середина диагонали CM (и DE). Тогда $OP = \frac{1}{2}DE$ как медиана прямоугольного треугольника DOE.

Однако $DE = CM$ как диагонали прямоугольника. Отсюда следует, что $OP = \frac{1}{2}CM$, а значит, треугольник COM прямоугольный с прямым углом COM.

2. Докажем, что любая точка M прямой k является вершиной одного из прямоугольников. Построим окружность с диаметром CM, центром этой окружности будет точка P. Окружность пройдёт через точку O, так как угол COM прямой. Так как расстояние от P до каждой из прямых OA и OB меньше, чем радиус PO, окружность вторично пересекает прямые OA и OB. Обозначим точки пересечения D и E. Заметим, что, поскольку треугольники DOP и EOP равнобедренные, сумма углов ODP и OEP равна $90°$, следовательно, точки D, P и E лежат на одной прямой. Тем самым в четырёхугольнике $CDME$ диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, это прямоугольник.

Если точки M и O совпадают, то искомым является прямоугольник, стороны CD и CE которого соответственно перпендикулярны прямым OA и OB.

3. Докажем, что средняя линия треугольника делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину с точкой на основании. Это и будет означать, что искомое множество середин — это средняя линия. Назовём среднюю линию LK. Рассмотрим угол ABD. Поскольку прямая LK параллельна AC, а точка L делит сторону AB пополам, точка M делит пополам сторону BD по теореме Фалеса.

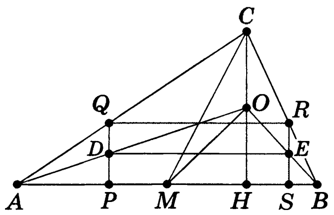
4. Треугольник AOB равнобедренный, OM — медиана, а значит, высота. При пробегании точкой B окружности получаем множество точек M, для которых угол AMO прямой. Это множество — окружность, построенная на AO как на диаметре, кроме точек A и O. Но точка M совпадает с точкой A, когда B стремится к A, а с точкой O — когда AB становится диаметром. Поэтому в ответе получаем полную окружность.

5. а) Искомое множество является объединением множества точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом, и точек A и B, т. е. это окружность с диаметром AB.

б) Из симметрии следует, что $BA = BE$ для произвольной точки E. Тем самым точка E лежит на окружности, для которой AB является радиусом, а точка B — центром.

6. См. решение задачи Д39 а).

7. Рассмотрим прямоугольник $PQRS$ (см. рисунок). Поскольку $PQ \parallel CH$, а AO — медиана треугольника ACH, AO делит PQ пополам в точке D. Аналогично BO делит RS пополам в точке E. В треугольнике AOB имеем $DE \parallel AB$, следовательно, медиана OM делит отрезок DE пополам. Заметим, что в прямоугольнике середина средней линии совпадает с точкой пересечения диагоналей. Тем самым точка пересечения диагоналей прямоугольника $PQRS$ лежит на отрезке OM.



См. также дополнительные задачи Д33—Д44.

Занятие 3
Метод освобождения точки

На этом занятии мы научимся решать задачи на построение с помощью метода освобождения точки, а также закрепим умение догадываться о виде траектории.

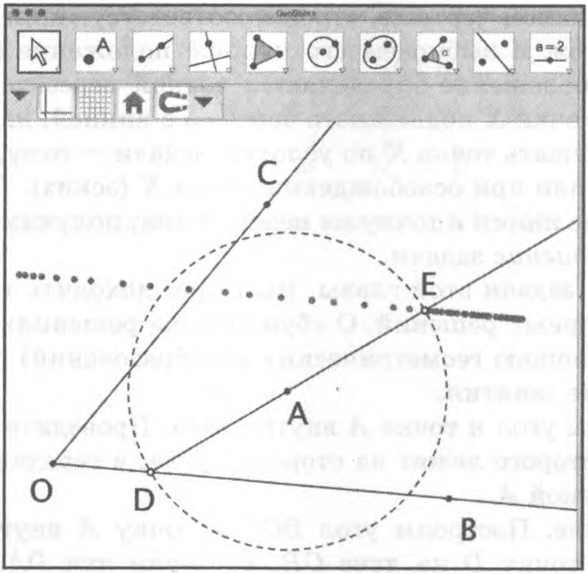
Многие непростые геометрические задачи на построение легко решаются в программах динамической геометрии с помощью такого необычного метода: освобождаем точку X в неподвижном чертеже, строим соответствующий подвижный чертёж и выбираем его нужное положение (прикидка). Это положение определяется точкой пересечения траектории точки X подвижного чертежа с линией, на которой должна лежать точка X по условию задачи — тому, которое мы опустили при освобождении точки X (эскиз). Построив указанные линии и точку их пересечения, получим *компьютерное решение* задачи.

Решая задачи этой главы, мы будем доходить только до компьютерных решений. О «бумажных» решениях этих задач (с помощью геометрических преобразований) рассказано в конце занятия.

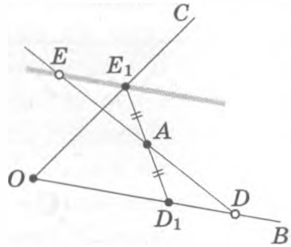
1. Даны угол и точка A внутри него. Проведите отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, а середина совпадает с точкой A.

Решение. Построим угол BOC и точку A внутри него. Отметим точку D на луче OB, проведём луч DA, построим окружность с центром A, проходящую через точку D. Обозначим вторую точку пересечения луча DA и окружности через E. Имеем $DA = AE$. Скроем окружность, чтобы не загромождать чертёж. Будем двигать точку D и добьёмся того, чтобы точка E попала на луч OC. Такое построение назовём *прикидкой*. Прикидка позволяет понять, как может выглядеть решение, она точнее, чем чертёж, построенный «на глазок». Однако мы хотим достичь большего, например, узнать количество решений задачи.

Для этого проследим за траекторией точки E. Чтобы удобнее было это делать, попросим точку E оставлять след. Вновь проведём точкой D по лучу — точка E прорисует след. Он также имеет вид луча. Точка пересечения следа с лучом OC единственна и соответствует концу искомого отрезка. Такое построение назовём *эскизом*. Эскиз позволяет понять количество решений задачи, однако у него тоже есть ограничения: линия следа довольно толстая, точку на её пересечении с лучом OC поставить нельзя. Если луч OC сдвинуть, то след перестанет соответствовать чертежу — его придётся прорисовывать заново.



Чтобы получить *компьютерное решение*, попробуем получить траекторию точки E с помощью *построений*, а не следа. Это луч, проходящий через произвольное положение точки E параллельно лучу OB (или же соединяющий два произвольных положения точки E). Построив его, убедимся, что он совпадёт со следом. Теперь мы можем завершить компьютерное решение задачи: отметим на пересечении нового луча с OC точку E_1 и достроим искомый отрезок D_1E_1. При варьировании исходного угла и положения точки A компьютерное решение будет оставаться решением.



Замечание. Искомый отрезок DE должен удовлетворять таким требованиям: 1) точка D лежит на луче OB; 2) точка E лежит на луче OC; 3) точка A делит отрезок DE пополам. Удовлетворить сразу трём условиям было трудно, поэтому мы отказались от одного из них (второго) и вместо одного отрезка получили целое семейство отрезков DE, после чего выбрали из этого семейства тот отрезок, который удовлетворяет условию 2. Такой метод построения чертежей называется *методом освобождения точки*[1].

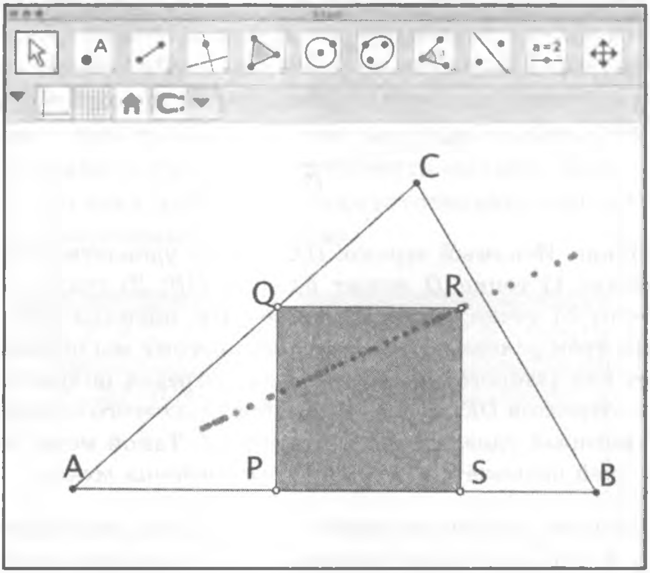
2. В данный остроугольный треугольник впишите квадрат так, чтобы две смежные вершины квадрата принадлежали одной стороне треугольника, а остальные две вершины — двум оставшимся сторонам.

Решение. Построим треугольник ABC. Искомый квадрат $PQRS$ должен удовлетворять следующим требованиям: 1) точки P и S принадлежат отрезку AB; 2) точка Q принадлежит отрезку AC; 3) точка R принадлежит отрезку BC. Опустим условие 3. Тогда нам надо вписать квадрат в угол BAC. Сделаем это согласно задаче 1.3, начиная с точки P. Теперь, двигая точку P по отрезку AB, будем получать разные квадраты, в том числе подходящий, с вершиной R на отрезке BC, — получим прикидку.

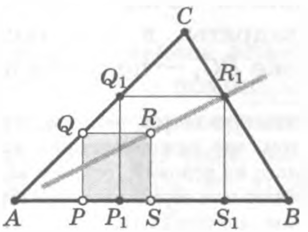
---

[1]Метод освобождения точки является частным случаем *метода ослабления условий*, суть которого в том, что для построения нужного решения мы временно отказываемся от одного из условий, решаем задачу без этого условия, а затем по полученному решению или серии решений строим искомое. Подробнее см. [15, занятие 6].

Попросим точку R оставлять след и получим луч, выходящий из вершины A (он не совпадает с биссектрисой угла A, как обычно предполагают школьники). Точка на пересечении луча с отрезком BC соответствует вершине искомого квадрата — получаем эскиз.



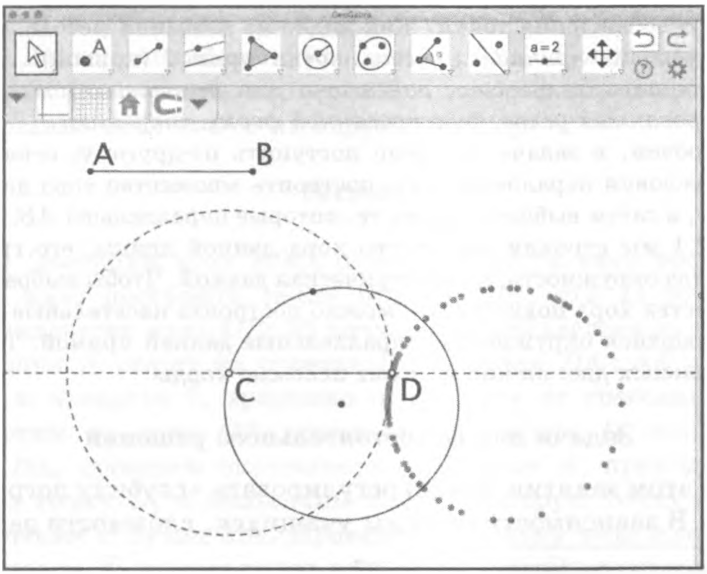
Чтобы получить компьютерное решение, построим луч из вершины A, проходящий через текущую вершину R. На пересечении его с отрезком BC отметим точку R_1. Из R_1 опустим перпендикуляр R_1S_1 на AB и по отрезку R_1S_1 построим квадрат $P_1Q_1R_1S_1$. Этот квадрат искомый. Решение единственное, так как есть только одна точка пересечения луча AR с отрезком BC.



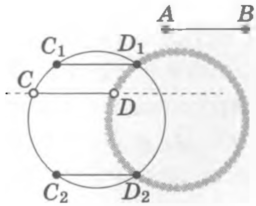
3. Даны окружность и отрезок AB, длина которого меньше диаметра окружности. Постройте хорду окружности, равную и параллельную отрезку AB.

Решение. Построим окружность и отрезок AB. Требуется построить отрезок CD, удовлетворяющий трём условиям: 1) точка C лежит на окружности; 2) точка D лежит на окружности; 3) отрезок CD равен и параллелен отрезку AB. Временно откажемся от условия 3. Отметим точку C на окружности, проведём через неё прямую, параллельную отрезку AB. Отложим на этой прямой от точки C отрезок CD, равный AB (например, с помощью окружности, которую потом скроем). Теперь будем перемещать точку C по окружности, пока точка D не попадёт на окружность (прикидка).

Попросим точку D оставлять след, вновь проведём точкой C по всей окружности — точка D прорисует след. Он также имеет форму окружности. Каждая из точек пересечения двух окружностей D_1 и D_2 соответствует концу искомого отрезка (эскиз). Мы видим, что у задачи два решения: C_1D_1 и C_2D_2.



Чтобы получить компьютерное решение, поймём, как окружность следа связана с исходной окружностью. Каждая её точка получается сдвигом точки данной окружности на расстояние AB в направлении от A к B. Естественно предположить, что и центр получается таким же сдвигом (в 9 классе будет дано строгое определение сдвига и этот факт будет доказан). Построим центр новой окружности и проведём её с таким же радиусом. Окружность пройдёт поверх нашего следа. Теперь мы можем отметить две точки пересечения окружностей, провести через них прямые, параллельные AB, и достроить точные решения задачи. Если откладывать отрезок, равный AB, в другую сторону от точки C, то мы получим те же два решения C_1D_1 и C_2D_2.



Замечание. Какое именно условие следует опускать, применяя метод освобождения точки? Как видно из названия метода, опускают условие *принадлежности точки прямой* (кривой). А вот условия *параллельности*, *равенства* или *отношения отрезков*, *фиксированных углов*, *фиксированной формы* сохраняют.

Впрочем, в задаче 3 можно поступить по-другому: отказаться от условия параллельности, построить множество хорд данной длины, а затем выбрать из них те, которые параллельны AB. В задаче 2.1 мы строили множество хорд данной длины, его границей была окружность, концентрическая данной. Чтобы выбрать из множества хорд подходящие, можно построить касательные к образовавшейся окружности, параллельные данной прямой. Таких касательных две, на них и лежат искомые хорды[1].

Задачи для самостоятельного решения

На этом занятии можно регулировать «глубину погружения». В зависимости от силы учащихся, сложности задачи

[1]См. также два решения задачи Д17.

и наличия времени можно требовать компьютерного решения или ограничиваться эскизом. Школьникам достаточно указать, сколько решений может иметь задача (число решений равно количеству точек пересечения соответствующих линий). Исследовать параметрическую зависимость количества решений от входных данных в этом возрасте ещё нецелесообразно.

4. Даны угол и точка A внутри него. Проведите отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, а точка A делит его в отношении $1:2$.

5. Даны две пересекающиеся прямые и отрезок AB, не параллельный этим прямым. Соедините прямые отрезком, равным и параллельным AB.

6. В данный остроугольный треугольник ABC впишите равносторонний треугольник так, чтобы одна из его сторон была параллельна AB.

7. Даны прямая, две окружности по разные стороны от неё и отрезок данной длины. Постройте равнобедренный треугольник так, чтобы вершины его основания лежали на данных окружностях, а высота, проведённая к этому основанию, была равна данному отрезку и лежала на данной прямой.

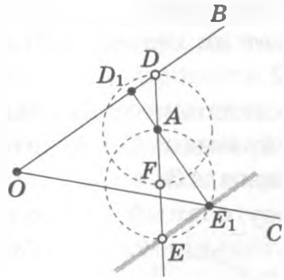
8. Даны точка A и окружности ω_1 и ω_2. Постройте квадрат $ABCD$, так чтобы вершина B лежала на окружности ω_1, а вершина а) C, б) D — на окружности ω_2.

Решения

4. Построим угол BOC, отметим внутри него точку A. Нам надо построить такой отрезок DE, что 1) точка D принадлежит лучу OB; 2) точка E принадлежит лучу OC; 3) точка A лежит на отрезке DE, причём $DA : AE = 1 : 2$. Как и в задаче 1, временно откажемся от требования 2. Отметим на луче OB произвольную точку D, построим луч DA, проведём окружность с центром A, проходящую через точку D, и обозначим через F вторую точку её пересечения с лучом DA. Проведём ещё одну окружность — с центром F, проходящую через точку A. Вторую точку её пересечения с лучом DA назовём E. Чтобы не загромождать чертёж, скроем окружности и точку F.

Подвигаем точку D по лучу OB так, чтобы точка E попала на луч OC (прикидка).

Попросим точку E оставлять след и прорисуем его, двигая точку D по лучу OB. Пересечению следа с лучом OC соответствует конец E_1 искомого отрезка (эскиз).

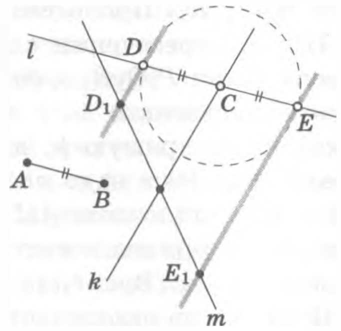


Чтобы получить компьютерное решение, заметим, что след точки E — это луч, параллельный OB. Построим прямую, проходящую через произвольное положение точки E параллельно лучу OB. На пересечении этой прямой с лучом OC отметим точку E_1, проведём луч E_1A и на пересечении лучей E_1A и OB отметим точку D_1. Решение единственно.

5. Построим две пересекающиеся прямые k и m и отрезок AB, отметим точку C на прямой k. Временно откажемся от принадлежности конца отрезка прямой m. Проведём через C прямую l, параллельную AB, и построим окружность с центром C и радиусом AB. Две точки пересечения окружности с прямой l назовём D и E. Двигая точку C по прямой k, добьёмся того, чтобы точка D попала на прямую m, получим прикидку. Далее добьёмся того, чтобы точка E попала на m, получим вторую прикидку.

Попросим точки D и E оставлять след, они пересекут прямую m в точках D_1 и E_1, которым соответствуют два эскиза.

Чтобы получить компьютерное решение, заметим, что траектория точки D — прямая, параллельная k. Проведём прямую p, параллельную k, через произвольное положение

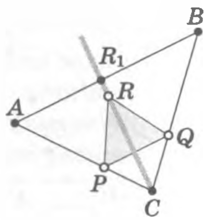


точки D. На пересечении прямой p с прямой m отметим точку D_1 и восстановим отрезок C_1D_1. Аналогично — с точкой E. Итого два решения.

Если отметить точку C на прямой m и дальше выполнить аналогичные построения, получим те же самые решения.

6. Временно откажемся от принадлежности одной из вершин искомого треугольника стороне данного. Построим указанный треугольник ABC, отметим на стороне AC точку P, проведём через неё прямую, параллельную AB. На пересечении прямой с BC отметим точку Q. Построим равносторонний треугольник PQR по стороне PQ так, что R и C лежат по разные стороны от PQ. Перемещая точку P по стороне AC, выберем такое её положение, чтобы R попала на AB (прикидка).

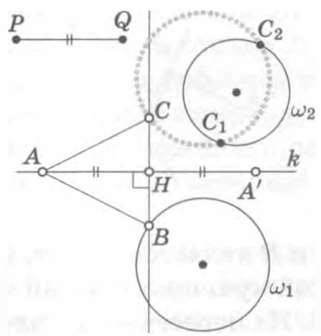
Попросим точку R оставлять след. Вершина искомого треугольника находится на пересечении траектории с отрезком AB (эскиз).



Траектория точки R является лучом, выходящим из точки C. Построим такой луч, проходящий через произвольное положение точки R. На пересечении полученного луча с отрезком AB отметим точку R_1. Проведём из R_1 лучи параллельно RP и RQ. На их пересечении с AC и BC отметим точки P_1 и Q_1. Треугольник $P_1Q_1R_1$ даёт искомое компьютерное решение, оно единственно.

7. Построим указанные прямую k, две окружности ω_1 и ω_2, а также отрезок PQ. Нам надо построить такой треугольник ABC ($AB = AC$), что высота AH равна PQ и лежит на прямой k, вершина B принадлежит окружности ω_1, а вершина C — окружности ω_2. Временно откажемся от последнего условия. Отметим на окружности ω_1 точку B, проведём из неё перпендикулярную прямую к прямой k, отметим H — основание перпендикуляра. Поскольку в равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, совпадает с медианой, получаем, что $BH = CH$. Проведём окружность с центром H, проходящую через точку B. Вторую точку её пересечения с прямой BH обозначим через C. Чтобы не загромождать чертёж, скроем последнюю окружность. Отложим на прямой k от точки H отрезки, равные PQ (например, с помощью окружности с центром H и радиусом PQ, которую потом скроем). Обозначим вторые концы отрезков через A и A'. Построим треугольники ABC и $A'BC$. Двигая вершину B по окружности, добьёмся того, чтобы вершина C попала на окружность ω_2 (прикидка).

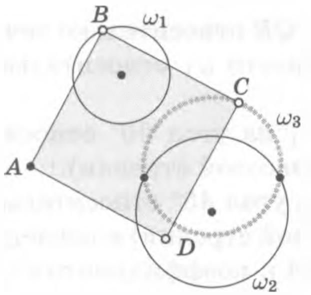
Теперь попросим точку C оставлять след и подвигаем точку B. Точка C нарисует окружность. Каждой точке пересечения получившейся окружности с окружностью ω_2 соответствует вершина C искомого треугольника. Эскиз готов.

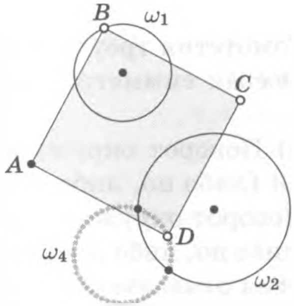


Чтобы осуществить компьютерное решение, построим окружность ω_1', равную ω_1, с центром, симметричным центру ω_1 относительно прямой k, — она совпадёт со следом. Точки пересечения этой окружности с ω_2 обозначим C_1 и C_2, достроим по ним треугольники.

Задача имеет 0, 2 или 4 решения — вдвое больше, чем точек пересечения у окружностей ω_1' и ω_2 (каждой точке пересечения C соответствуют два треугольника — ABC и $A'BC$).

8. Построим точку A и окружности ω_1 и ω_2, отметим на окружности ω_1 произвольную точку B. Построим на отрезке AB квадрат $ABCD$. Выберем такое положение точки B, при котором точка C (D) принадлежит ω_2 (прикидка). Попросим точку C (D) оставлять след. Когда точка B пробегает окружность ω_1, точка C (D) также будет пробегать окружность ω_3 (ω_4). Каждой общей точке окружностей ω_2 и ω_3 соответствует решение задачи (эскиз).





На отрезке AB можно построить два квадрата по разные стороны от AB, при этом получаются две окружности ω_3 и ω_3'. Поэтому задача может иметь от 0 до 4 решений.

Замечание. При решении задач 4, 5, 7, 8 в «Геогебре» можно заменять данные прямые, лучи или окружности на произвольные кривые. Ход решения не изменится, зато будет развенчан стереотип, что в геометрии можно работать только с прямыми и окружностями.

* * *

Мы довели задачи до компьютерного решения. Чтобы получить решения задач в традиционном смысле, надо понять, с каким множеством точек совпадает траектория подвижной точки (как правило, это хорошо известная линия или фигура), и доказать это. Чаще всего помогает знание различных ГМТ и умение работать с ними. В более старших классах доказательству поможет рассмотрение следов как образов других множеств при движениях плоскости и гомотетиях.

Перечислим по порядку преобразования, которые осуществляются в задачах этого занятия.

1. Центральная симметрия луча OB относительно точки A.

2. Гомотетия квадрата $PQRS$ относительно точки A.

3. Параллельный перенос окружности на вектор $\overrightarrow{AB}$.

4. Гомотетия луча OB относительно точки A с коэффициентом -2.

5. Параллельный перенос прямой k на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $-\overrightarrow{AB}$.

6. Гомотетия треугольника PQR относительно точки C.

7. Осевая симметрия окружности ω_1 относительно прямой k.

8. а) Поворот окружности ω_1 на угол 90° относительно точки A (либо по, либо против часовой стрелки).

б) Поворот окружности ω_1 на угол 45° относительно точки A (либо по, либо против часовой стрелки) и последующая гомотетия относительно точки A с коэффициентом $\sqrt{2}$. Эта композиция преобразований называется *поворотной гомотетией*.

Покажем для примера, как завершить решение задачи 1.

Поскольку точки D и E должны быть симметричны относительно точки A и точка D принадлежит лучу OB, точка E должна лежать на луче $O'B'$, симметричном лучу OB относительно A. Построив луч $O'B'$, найдём точку его пересечения с OC (она всегда есть), это и будет точка E. Отрезок ED достраиваем очевидным образом.

Можно поставить цель довести все задачи до «бумажного» решения, тогда получится такая схема: *в результате компьютерных построений угадать решающее преобразование, доказать его законность и сформулировать после-*

довательность построений, приводящую к искомой фигуре (подробнее см. статью [6]). В этом случае может быть целесообразно разбить это занятие на два. В первом (8 класс) дать только задачи на осевую и центральную симметрии как наиболее простые и рано вводимые движения (3.1, 3.7, Д10, Д13 а), в), Д14, Д16). Во втором (9 класс, *после* того как введены определения и свойства соответствующих преобразований) — задачи на гомотетию, поворот и параллельный перенос (3.2—3.6, 3.8, Д15, Д19).

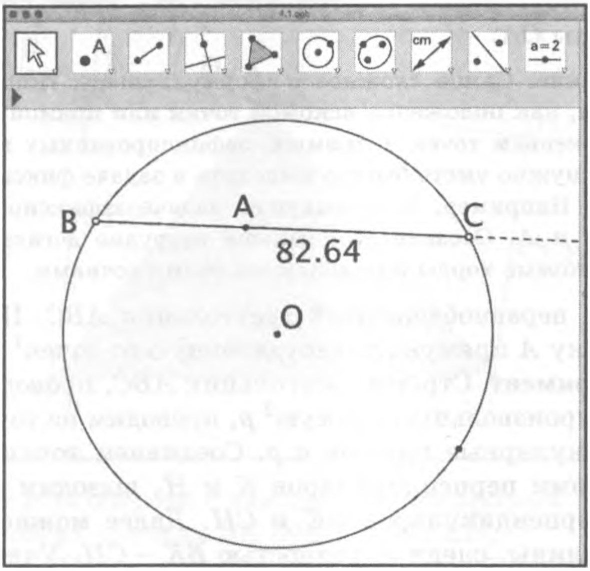
См. также дополнительные задачи Д10—Д23. Дополнительные задачи Д10—Д15 аналогичны приведённым в главе. Задачи Д16—Д20 а), Д21 а) сложнее, в них решающее преобразование неочевидно. В задачах Д20 б), Д21 б), Д22, Д23 решающее преобразование не относится к классам преобразований движения или гомотетии, так что приходится ограничиваться компьютерным решением.

Занятие 4
Измерения на чертеже. Задачи на минимум и максимум-1

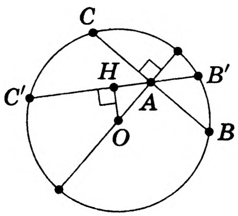
На этом занятии мы будем с помощью измерений решать задачи на нахождение минимумов и максимумов расстояний и их сумм. Всем учителям знакома такая попытка решения задачи на построение: «...и будем двигать прямую, пока она не займёт нужное положение». При использовании подвижных чертежей этот наивный подход даёт первый шаг к решению!

1. Даны окружность и точка A внутри неё. Проведите через точку A хорду а) наибольшей длины, б) наименьшей длины.

Эксперимент. «На глаз» провести нужную хорду нетрудно. Однако нам нужно точное решение. Построим окружность и точку A внутри неё. Проведём сначала произвольную хорду через точку A. Для этого один её конец поместим в произвольную точку B на окружности, а второй — в точку C пересечения окружности с лучом BA. Выведем на экран длину хорды BC. Перемещая точку B по окружности, подберём такие её положения, при которых длина отрезка BC окажется наибольшей и наименьшей. Допустим, мы с хорошей точностью нашли искомое расположение хорд для данной окружности и точки. Но что мы будем делать, если нам предложат эту задачу для других окружности и точки? Не хочется каждый раз заново измерять отрезки и подбирать хорду, хочется понять, что *всегда выделяет искомую хорду* среди всех хорд. Назовём центр окружности O (при решении задач с окружностью всегда полезно отметить её центр!). Легко заметить, что *наибольшая хорда проходит через точку O, а наименьшая хорда перпендикулярна отрезку OA*. Для подкрепления этой гипотезы проведём прямую через точку A перпендикулярно прямой OA, измерим длину соответствующей хорды и проверим, что длина любой другой хорды больше.



Решение. Будем использовать тот факт, что чем ближе хорда к центру данной окружности, тем она длиннее. Теперь наша задача — провести хорду через точку A соответственно на наименьшем или наибольшем расстоянии от точки O. Наименьшее расстояние равно нулю, следовательно, это будет хорда, проходящая через O, т. е. диаметр. Чтобы получить наибольшее расстояние, проведём прямую OA и проведём через точку A хорду BC перпендикулярно этой прямой. Докажем, что BC — самая удалённая от центра хорда среди всех, проходящих через A.



Действительно, проведём через точку A произвольную хорду $B'C'$ и опустим на неё перпендикуляр OH. Расстояние от центра окружности до BC равно OA, а до $B'C'$ — OH. Но в прямоугольном треугольнике OHA катет OH короче гипотенузы OA.

Замечание. Самое сложное — сформулировать гипотезу, т. е. догадаться, как положение искомой точки или прямой определяется положением точек и прямых, зафиксированных в условии. Для этого нужно уметь быстро выделять в задаче фиксированные элементы. Например, в предыдущей задаче зафиксированы две точки — O и A. Осознав это, дальше нетрудно догадаться, как именно искомые хорды определяются этими точками.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Проведите через точку A прямую, равноудалённую от точек[1] B и C.

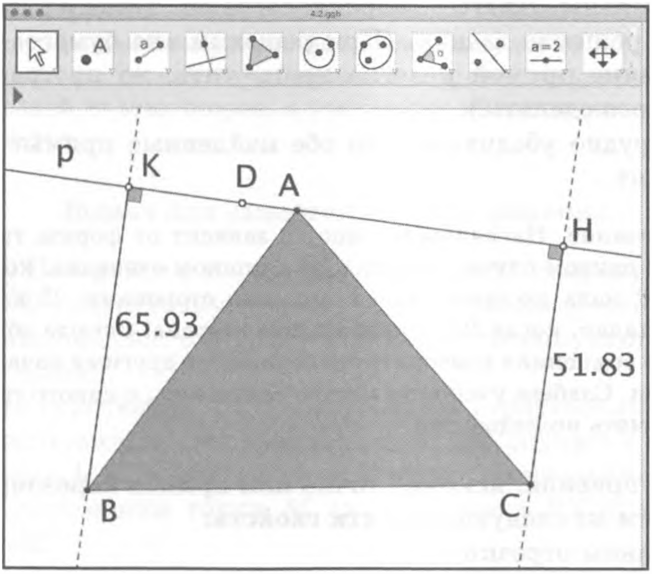
Эксперимент. Строим треугольник ABC, проводим через точку A произвольную прямую[2] p, проводим из точек B и C перпендикулярные прямые к p. Соединяем точки B и C с основаниями перпендикуляров K и H, выводим на экран длины перпендикуляров BK и CH. Далее можно сравнивать их длины, следя за разностью $BK - CH$. Учителю для демонстрации удобно визуализировать объект наблюдения: выведем на экран модуль разности $|BK - CH|$ и построим отрезок PQ, равный по длине этой величине[3].

Вращая прямую p, найдём такое её положение, при котором $BK - CH$ поменяет знак (а отрезок PQ стянется в точку). Это случится дважды. Как при этом расположена прямая p относительно фиксированных точек A, B и C? Предположим, что *в одном случае прямая p параллельна BC, а во втором — прямая p проходит через середину отрезка BC.* Для подкрепления этой гипотезы построим прямую, содержащую медиану AL треугольника ABC, и прямую, проходящую через точку A параллельно BC, и целенаправленно

[1] Эта задача не про экстремумы, однако и техника исследования и методы доказательства тут такие же, как в других задачах этого занятия.

[2] Удобнее всего сделать так: построить маленькую окружность с центром A, на ней отметить точку D, окружность скрыть, провести прямую $AD = p$. Прямую p можно двигать, двигая точку D по окружности.

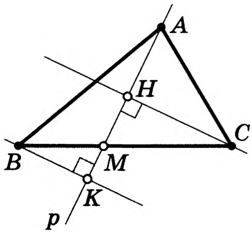
[3] В «Геогебре» для этого есть удобный инструмент «Отрезок с фиксированной длиной», который позволяет задавать длину отрезка выражением.



совместим p по очереди с каждой из этих прямых. Действительно, в обоих случаях BK будет равно CH.

Решение. Пусть p — искомая прямая. Рассмотрим два случая.

1. Пусть прямая p пересекает отрезок BC в точке M. Если $BK = HC$, то прямоугольные треугольники BMK и CMH равны по катету и острому углу (накрест лежащие углы MBK и MCH при параллельных прямых). Следовательно, $BM = CM$ и искомая прямая проходит через середину стороны BC.



2. Пусть прямая p не пересекает отрезок BC. Рассмотрим четырёхугольник $BKHC$ (точки K и H те же, что и в первом абзаце). Поскольку стороны BK и CH равны и

параллельны, $BKHC$ — параллелограмм. Тогда $p \parallel BC$ — это второе решение задачи. (При решении «на бумаге» второе положение прямой p легко пропустить, но программа не даёт этого сделать.)

Нетрудно убедиться, что обе найденные прямые всегда подходят.

Замечание. Наглядность гипотез зависит от формы треугольника. В данном случае гипотеза не слишком очевидна, когда сторона BC мала по сравнению с другими сторонами. И наоборот, всё наглядно, когда BC — наибольшая сторона. Отсюда общий совет: при сомнениях повторить эксперимент с другими начальными данными. Слабым ученикам можно советовать, с какого треугольника начать исследование.

Как правило, искомая точка или прямая характеризуется одним из следующих **пяти свойств**:

— равны отрезки;

— равны углы;

— прямые параллельны;

— прямые перпендикулярны;

— точка принадлежит прямой или окружности.

(Полезно найти эти свойства в двух только что разобранных задачах.)

Можно предложить такую методику выдвижения и подкрепления гипотез:

1) постройте подвижный чертёж;

2) найдите искомую точку или прямую экспериментально;

3) поймите, какое свойство выделяет эту точку или прямую среди других, последовательно проверяя каждое из пяти свойств (*выдвижение гипотезы*);

4) постройте точку или прямую с найденным свойством и проверьте экспериментально, действительно ли она удовлетворяет условиям задачи (*подкрепление гипотезы*); если не удовлетворяет, вернитесь к пункту 3.

Если школьник пытается сдать неверную гипотезу, лучше всего опровергнуть её экспериментом, поменяв конфигурацию чертежа или уточнив измерения.

Например, если в задаче 2 на чертеже ученика $AB \approx AC$, то он может предположить, что AM перпендикулярно BC. В таком случае учитель может на подвижном чертеже сильно увеличить длину одной из этих сторон, и ученик сам убедится, что его гипотеза неверна.

Задачи для самостоятельного решения

3. а) Постройте в плоскости выпуклого четырёхугольника $ABCD$ такую точку, что сумма расстояний от неё до вершин наименьшая. б*) Та же задача для невыпуклого четырёхугольника.

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M, и из неё опущены перпендикуляры MK и MP на катеты этого треугольника. При каком положении точки M длина отрезка PK будет наименьшей?

5. Найдите в остроугольном треугольнике точку, для которой сумма расстояний до вершин треугольника и до его сторон (всего шесть отрезков) — наименьшая.

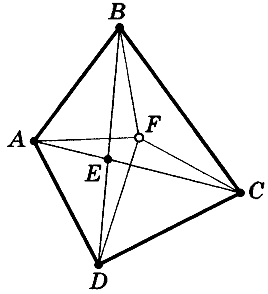
6. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M, и из неё опущены перпендикуляры MK и MP на боковые стороны этого треугольника. При каком положении точки M сумма $MK + MP$ будет наименьшей?

7. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Через вершину A проведите прямую p так, чтобы сумма расстояний от неё до вершин B и C была наибольшей.

8. Даны угол и окружность внутри него (не имеющая общих точек со сторонами угла). Постройте точку окружности, сумма расстояний от которой до прямых, содержащих стороны угла: а) минимальна, б) максимальна.

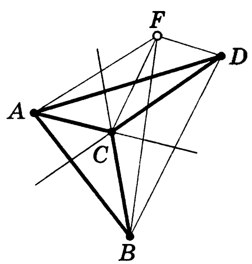
Решения

3. а) **Эксперимент.** Построим произвольный выпуклый четырёхугольник $ABCD$, отметим внутри него произвольную точку F, проведём отрезки AF, BF, CF и DF, выведем на экран их длины, а также их сумму. Будем перемещать точку F и следить за суммой. (Можно визуализировать сумму в виде отрезка.) *Сумма окажется минимальной, когда точки A, F, C, а также точки B, F, D лежат на одной прямой.* Чтобы подкрепить гипотезу, проведём диагонали AC и BD и совместим точку F с точкой пересечения диагоналей E.

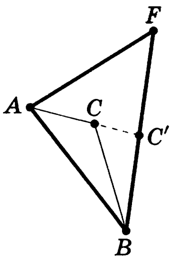


Решение. Докажем, что минимум достигается в точке E пересечения диагоналей четырёхугольника. Пусть F — другая точка. Тогда $AE + EC = AC \leqslant AF + FC$ по неравенству треугольника (для треугольника AFC). Аналогично $BE + ED = BD \leqslant BF + FD$ по неравенству треугольника (для треугольника BFD). При этом равенство достигается, когда точка F лежит на обеих диагоналях, т. е. совпадает с E.

б) **Эксперимент.** Используем тот же подвижный чертёж, но переместим вершину C внутрь треугольника ABD. По аналогии с выпуклым четырёхугольником можно было бы ожидать, что минимум будет достигаться в точке пересечения прямых, содержащих диагонали. Однако эксперимент даёт вершину «входящего» угла BCD (т. е. угла четырёхугольника, который больше развёрнутого).



Решение. Разобьём плоскость четырёхугольника на три области и докажем утверждение для каждой области отдельно. Пусть BCD — «входящий» угол (вершина C лежит внутри треугольника ABD). Проведём три луча, дополнительные к лучам CA, CB и CD. Они разобьют плоскость на три области. Выберем одну из них, например ту, в которой лежит отрезок CD, и поместим в неё произвольную точку F. Докажем, что $AF + BF + CF + DF \geqslant AC + BC + DC$. В самом деле, $AF + BF \geqslant AC + BC$ (объемлющая больше объемлемой)[1], а $CF + DF \geqslant DC$ по неравенству треугольника. При этом оба неравенства превращаются в равенства, если $F = C$. Для двух остальных областей рассуждения аналогичны.



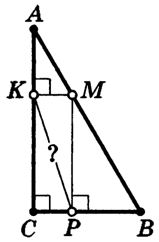
Замечание. Почти во всех задачах этого занятия на минимум и максимум подвижная точка движется по фиксированной линии или прямая вращается вокруг фиксированной точки. Но в задачах 3 и 5 точка движется по двумерной области. В этом случае гипотеза требует более аккуратной проверки — предположив, что в данной точке будет достигаться минимум, надо из этой точки подвигаться в *разных* направлениях и проверить, что во всех направлениях наблюдаемая величина увеличивается.

4. Эксперимент. Построим прямоугольный треугольник ABC, отметим на гипотенузе AB точку M, проведём из неё перпендикулярные прямые к катетам, назовём основания перпендикуляров K и P (K — на AC, P — на BC).

---

[1] Пусть точка C лежит внутри треугольника ABF. Тогда $AF + BF > AC + BC$. Действительно, пусть прямая AC пересекает отрезок BF в точке C'. Тогда $AF + C'F > AC + CC'$. Добавим к обеим частям неравенства BC'. Получим $AF + BF > AC + (BC' + CC') > AC + BC$. (Проверьте, что равенство достигается только тогда, когда $C = F$.)

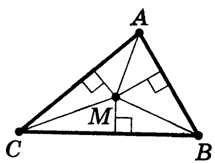
Проведём отрезок KP. Построим рядом равный ему отрезок и будем наблюдать за его длиной, перемещая точку M по AB. *Наименьшему отрезку PK соответствует отрезок CM, перпендикулярный AB.* Чтобы подкрепить эту гипотезу, проведём из C перпендикулярную прямую к AB и убедимся, что отрезок PK является наименьшим, когда точка M лежит на этой прямой.



Решение. Заметим, что $MKCP$ — прямоугольник, значит, его диагонали равны: $CM = PK$. Следовательно, мы можем минимизировать CM вместо PK. Но кратчайшим отрезком CM является перпендикуляр.

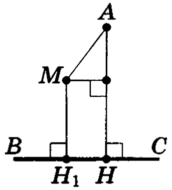
Замечание. На самом деле прямоугольность треугольника не важна. Для любого треугольника ABC минимум длины PK также будет достигаться для отрезка, соответствующего высоте CM (в тупоугольном треугольнике ABC точка M может лежать на продолжении стороны AB). Этот факт легко установить экспериментально, а для его доказательства можно, например, заметить, что точки C, K, P, M лежат на окружности, и применить к треугольнику CKP обобщённую теорему синусов. См. также задачу 7.2.

5. Эксперимент. Начертим треугольник ABC, отметим внутри точку M, соединим её отрезками с вершинами и опустим перпендикуляры на стороны. Выведем на экран длины всех шести отрезков, а также их сумму, будем двигать точку M и наблюдать за суммой (можно сумму



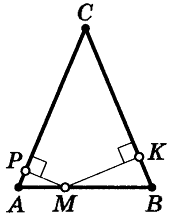
визуализировать в виде отрезка). *Минимум суммы достигается в точке, в которой перпендикуляры являются продолжениями отрезков до вершин.* Для подкрепления гипотезы проведём высоты треугольника и совместим M с точкой их пересечения.

Решение. Сначала решим следующую вспомогательную задачу. Даны точка A и прямая BC. Найдите точку M, для которой сумма расстояний до точки A и до прямой BC наименьшая. Нетрудно понять, что нам подходит любая точка перпендикуляра AH, опущенного из A на BC. Ведь в этом случае сумма расстояний будет равна AH. А если точка M лежит вне отрезка, то сумма равна $AM + MH_1 > AH$ (здесь H_1 — основание перпендикуляра, опущенного из M на BC).



Теперь разобьём сумму шести расстояний на три пары — расстояние до вершины плюс расстояние до противоположной стороны. В каждой паре минимум достигается, когда M лежит на соответствующей высоте. Значит, общий минимум достигается, когда M — точка пересечения высот.

6. Эксперимент. Равнобедренный треугольник можно построить так: проведём окружность с центром в точке C, отметим на ней две точки A и B, отметим треугольник ABC и скроем окружность. Построим точку M и перпендикуляры, как в условии, выведем на экран сумму $MK + MP$. Будем



двигать точку M по отрезку AB и обнаружим, что *сумма не меняется!*

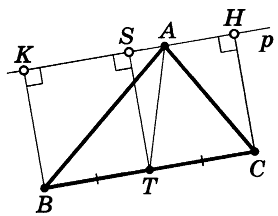
Решение. Рассмотрим треугольники ACM и BCM. Имеем $2S_{ACM} = AC \cdot MP$, $2S_{BCM} = BC \cdot MK$, $2S_{ABC} = \text{const} = 2S_{ACM} + 2S_{BCM} = AC \cdot (MP + MK)$. Следовательно, $MP + MK = \text{const}$.

Замечание. В этой задаче эксперимент очень чувствителен к погрешностям: если построить равнобедренный треугольник «на глазок», то программа покажет минимум суммы в одном из концов основания. Школьникам полезно время от времени предлагать задачи-«ловушки», тип которых меняется по ходу решения — в данном случае задача на минимум превратилась в задачу на инвариант.

7. Эксперимент. Используем подвижный чертёж к задаче 2. Построим отрезок, равный по длине $BK + CH$, будем вращать прямую p и следить за его длиной. Там, где сумма изменяется медленно, удобно следить за отрезком, а где быстро (вблизи максимума) — за числом. *Сумма $BK + CH$ окажется наибольшей, когда $KA = AH$.*

Для подкрепления этой гипотезы проведём отрезок KH и построим его середину S. Вращением прямой p совместим точку S с вершиной A и убедимся, что при этом положении p достигается максимум суммы. Можно также проследить за величиной $KA - AH$.

Второй максимум достигается, когда прямая p соответствует высоте AQ треугольника, однако этот максимум меньше, чем указанный выше.



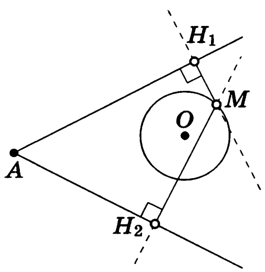
Решение. Пусть прямая p не пересекает *отрезок BC*. Заметим, что $BKHC$ — трапеция или параллелограмм ($BK \parallel HC$), а ST — её средняя линия. Значит, $BK + HC = 2ST$, и можно вместо $BK + HC$ максимизировать ST. Точка T зафиксирована как середина данной стороны BC. Точка S — основание перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую p, проходящую через точку A. Если S не совпадает с A, то TS — катет прямоугольного треугольника с фиксированной гипотенузой TA. Поэтому самое большое значение TS достигается, когда S совпадает с A. Заметим, что, поскольку угол BAC по условию острый, углы TAB и TAC тоже острые. А поскольку при $S = A$ углы TAK и TAH по построению прямые, в этом случае прямая p имеет с углом BAC только одну общую точку — A, а значит, не пересекает отрезок BC.

Пусть прямая p пересекает отрезок BC в точке M (см. чертёж к задаче 2). Тогда $AM \cdot (BK + HC) = 2S_{ABM} + 2S_{ACM} = 2S_{ABC} = \mathrm{const}$. Следовательно, $BK + HC$ максимально тогда, когда AM минимально, т. е. когда AM совпадает с высотой AQ. Но в этом случае $BK + HC = BQ + QC = BC < 2AT$, так как треугольник остроугольный.

Итак, искомая прямая p перпендикулярна медиане AT.

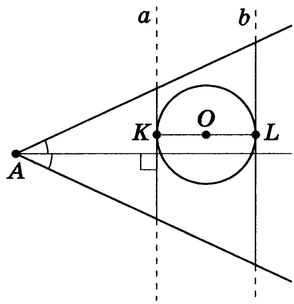
Замечание. Более общая конструкция рассматривается в задаче Д31.

8. Эксперимент. Построим два луча с общей вершиной A и окружность внутри образовавшегося угла, отметим точку M на окружности, проведём из неё перпендикулярные прямые к сторонам угла, проведём отрезки от M до оснований перпендикуляров H_1 и H_2, выведем на экран сумму их длин, построим отрезок $PQ = MH_1 + MH_2$. Будем двигать точку M по окружности и следить за длиной PQ. Минимум достигается в некоторой точке K, а максимум — в диаметрально противоположной ей точке L. Легко проверить,



что точки A, K и L не лежат на одной прямой. Как же определить KL через данные задачи? Построим биссектрису угла A. Теперь нетрудно заметить и проверить, что *отрезок KL параллелен биссектрисе угла*. (Другой подход: продлим отрезок KL до пересечения со стороной угла, выведем на экран величину образовавшегося угла и заметим, что он равен половине угла A.)

Решение. Проведём биссектрису угла и параллельный ей диаметр окружности. Из концов диаметра проведём две прямые a и b, перпендикулярные биссектрисе. Далее воспользуемся результатом задачи 6: в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки на основании до боковых сторон постоянна и равна высоте, проведённой к боковой стороне. Поэтому для прямой a эта сумма меньше, чем для любой прямой, лежащей дальше от вершины угла. Следовательно, ближний к вершине конец диаметра даёт наименьшую на окружности сумму расстояний, а дальний — наибольшую.



Замечание. В двух последних задачах гипотезу выдвинуть сложнее, чем в предыдущих, поскольку одно из пяти свойств там выполняется не для элементов, заданных явно в условии, а для элементов, получаемых из них дополнительными построениями (основания перпендикуляров и биссектриса угла). В задаче 8 к этому дополнительному построению может привести рассмотрение симметричного частного случая (центр окружности лежит на биссектрисе угла). В задаче 7 рассмотрение симметричного случая ($AB = AC$) наоборот, запутало бы дело, так как для равнобедренного треугольника максимум достигается, когда прямая p

параллельна основанию BC, но это свойство не обобщается на произвольный треугольник.

Вообще, при решении сложных задач любое наблюдение нуждается в теоретическом осмыслении, чтобы стать гипотезой.

См. также дополнительные задачи Д24—Д32.

Занятие 5
Оживляем траектории

На занятиях 2 и 3 мы строили траектории подвижных точек как следы. На этом занятии мы научимся *оживлять эти следы*, т. е. строить траектории точек как фигуры. Это позволяет проводить:

— более мощные подкрепления гипотез (охват большего количества проверяемых случаев, задачи 3 и 4);

— удобное исследование частных случаев (задачи 1, 6);

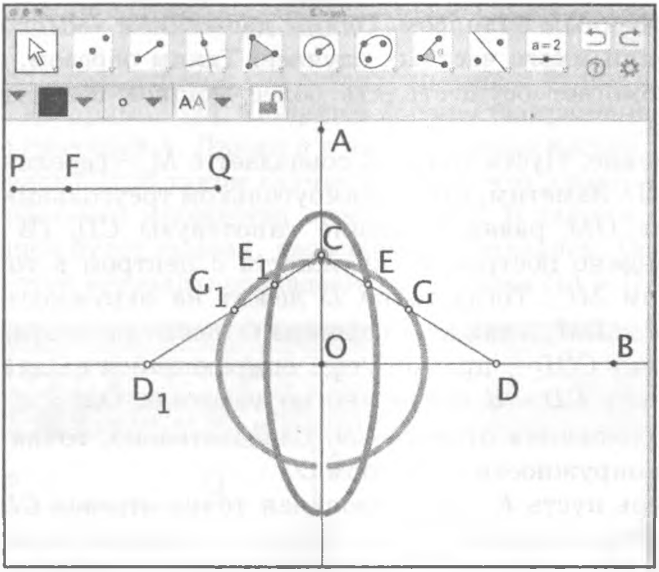
— построение двумерных ГМТ, зависящих от двух точек (задачи 2, 5).

Чтобы оживить след точки, в «Геогебре» применяется команда «Локус», в «Живой математике» — «Геометрическое место», в «Математическом конструкторе» — «ГМТ» / «Динамический след».

Кроме того, на занятиях 2 и 3 мы только выдвигали гипотезы о виде следа, а здесь будем ещё и доказывать их.

1. По взаимно перпендикулярным прямым OA и OB скользят концы отрезка CD фиксированной длины. а) На отрезке CD отмечена точка E. Изучите траекторию точки E в зависимости от её положения на отрезке. б*) Постройте множество всех отрезков CD.

Эксперимент. а) Строим взаимно перпендикулярные прямые OA и OB и отрезок PQ, задающий фиксированную длину. Затем строим окружность с вершиной в точке C, лежащей на прямой OA, и радиусом PQ. Проводим радиусы CD и CD_1, соединяющие центр окружности и точки пересечения окружности с прямой OB, после чего скрываем окружность. Отмечаем произвольную точку E на радиусе CD и симметричную ей точку E_1 на радиусе CD_1 (например, с помощью окружности с центром C, проходящей через точку E) и командуем ей оставлять след. Двигая точку C по прямой OA, прорисовываем траекторию точки E. Получается некая кривая. Чтобы получить траекторию для другого положения точки E, приходится перемещать точку E по отрезку CD, стирать нарисованный след и снова двигать точку C по прямой OA. Получается довольно громоздкая процедура. Её можно упростить с помощью оживления следа: построим живой след точки E при движении точки[1] C. Мы получим траекторию точки E, которую не надо прорисовывать и которая автоматически меняется при перемещении точки E по отрезку CD. Чтобы получить полную траекторию, построим также живой след точки E_1 при движении точки C.



Видно, что *если E — середина CD, то траектория* похожа на *окружность с центром в точке O и радиусом, равным половине PQ*. Для подкрепления этой гипотезы отме-

[1]Порядок выбора двух точек и команды/инструмента в разных программах отличается, см. словарик. В «Геогебре» (версия 5) не получится оживить след произвольной точки отрезка. Придётся поставить точку F на отрезок-шаблон PQ, а затем отложить отрезок $CE = PF$ на отрезке CD. Теперь можно построить живой след точки E, а регулировать её положение на отрезке CD с помощью точки F.

тим точку M — середину CD, совместим с ней точку E и построим указанную окружность — она совпадёт с траекторией.

Если же точка E не совпадает с M, то её траектория похожа на *эллипс*. Чем дальше E от M, тем более эллипс «вытягивается»; если E совпадает с одним из концов отрезка CD, то траектория превращается в отрезок, лежащий на одной из прямых.

Для подкрепления этой гипотезы можно отметить на траектории пять произвольных точек и построить конику по пяти точкам[1]. Двигая точку E по отрезку CD, увидим, что при любом её положении траектория совпадает с построенным эллипсом. Одним движением «мышки» мы проверили много частных случаев. Таким образом, живой след помогает осуществлять более мощное подкрепление гипотез.

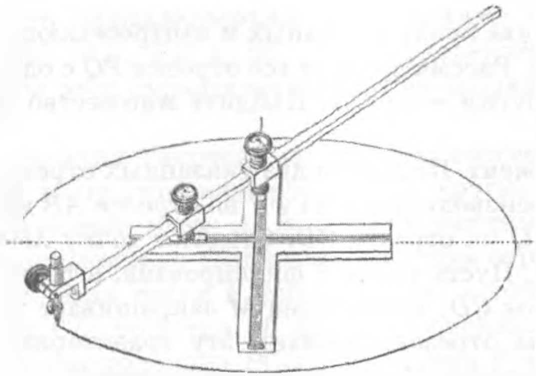
Решение. Пусть точка E совпадает с M — серединой отрезка CD. Заметим, что в прямоугольном треугольнике COD медиана OM равна половине гипотенузы CD. (В самом деле, можно построить окружность с центром в точке M радиусом MC. Тогда точка D лежит на окружности, так как $CM = DM$, а также и вершина O лежит на окружности, поскольку COD — прямой угол, опирающийся на диаметр.) Поскольку $CD = d$ постоянно по условию, $OM = d/2$ при всех положениях отрезка CD. Следовательно, точка M лежит на окружности с центром O.

Теперь пусть E — произвольная точка отрезка CD. Введём систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой OB, а ось ординат — с прямой OA. Пусть $CE = a$, $ED = b$, $\angle ODC = \alpha$, $E(x, y)$. Тогда $x = a\cos\alpha$, $y = b\sin\alpha$, следовательно, $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ независимо от α. Но это уравнение эллипса. (При $a = b$ получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$.) Если E — точка прямой CD вне отрезка CD, действуем аналогично.

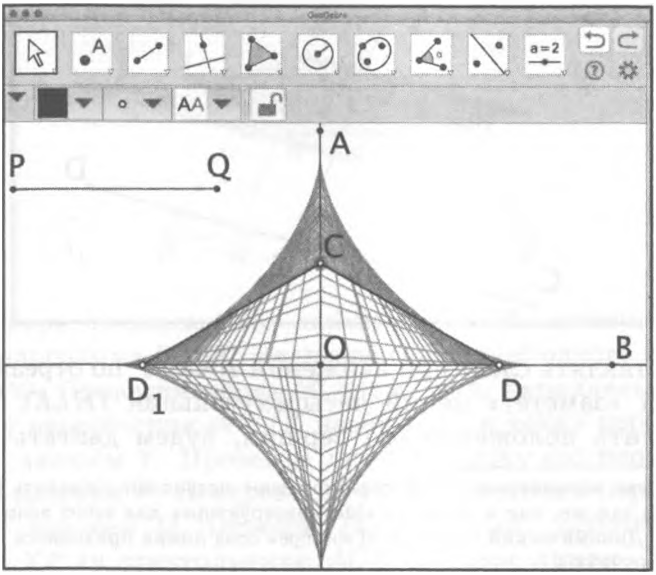
Замечание. Решение этой задачи даёт идею механического устройства для вычерчивания эллипса — эллипсографа Леонардо

[1] Такой инструмент есть в «Геогебре» и «Матконструкторе».

да Винчи (см. рисунок). Фиксируя карандаш в различных точках отрезка AC, получаем разные эллипсы.



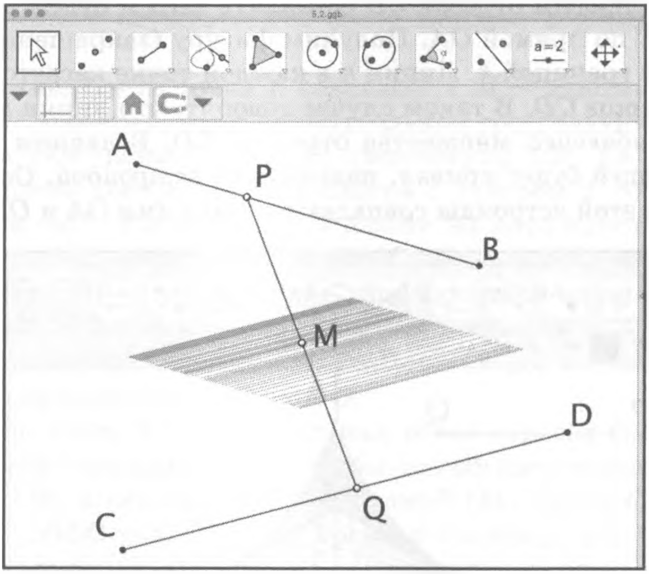
б) Попросим отрезок CD оставлять след и будем двигать точку C по прямой OA. Получим фигуру (закрашенную область) с границей k. Линии k в каждой точке касается один из отрезков CD. В таком случае говорят, что линия k является *огибающей* множества отрезков CD. В данном случае огибающей будет кривая, называемая *астроидой*. Оси симметрии этой астроиды совпадают с прямыми OA и OB.



Тем самым в задаче 2.1 мы выяснили, что огибающей хорд данной длины является окружность.

2. Даны два непараллельных и непересекающихся отрезка AB и CD. Рассматривают все отрезки PQ с одним концом на AB и другим — на CD. Найдите множество середин отрезков PQ.

Эксперимент. Построим два указанных отрезка AB и CD, отметим произвольную точку P на отрезке AB и произвольную точку Q на отрезке CD. Отметим точку M — середину отрезка PQ. Пусть точка P фиксирована, а точка Q «пробегает» отрезок CD, тогда точка M закрашивает траекторию, похожую на отрезок. Оживим эту траекторию (построим живой след точки M при движении точки Q) и попросим её



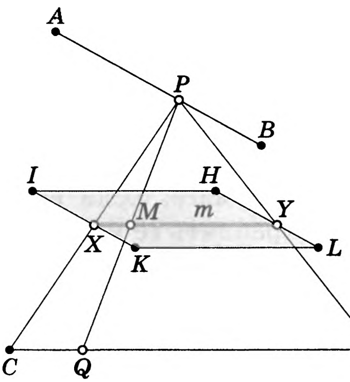
саму оставлять след[1] при движении точки P по отрезку AB. Отрезок «заметёт» некий четырёхугольник $IHLK$. Чтобы определить положение его вершин, будем двигать точки

[1] «Живая математика» и «Матконструктор» позволяют оживлять след линии точно так же, как и точки (в «Матконструкторе» для этого используется команда «Динамический след»). В «Геогебре» след линии приходится прорисовывать «вручную».

P и Q, добиваясь совмещения точки M последовательно с каждой из четырёх вершин четырёхугольника. Получим, что это *параллелограмм с вершинами в серединах отрезков AC, AD, BD и BC*. Для подкрепления гипотезы построим этот параллелограмм — он совпадёт с нашим следом.

Мы выдвинули гипотезу по одному частному случаю. Подкрепим нашу гипотезу, рассмотрев другие случаи: поменяем положение точек A, B, C и D и увидим, что параллелограмм продолжает совпадать со следом отрезка.

Решение. Если точка P фиксирована, а точка Q пробегает отрезок CD, то точка M пробегает отрезок XY — среднюю линию треугольника PCD. Если точка P пробегает отрезок AB, то точка X пробегает отрезок IK — среднюю линию треугольника ABC, а точка Y — отрезок HL — среднюю линию треугольника ABD. Точка M принадлежит объединению отрезков XY, т. е. параллелограмму $IHLK$.



Теперь докажем, что любая точка M, лежащая в параллелограмме $IHLK$, является серединой одного из отрезков PQ. Проведём через M прямую m, параллельную CD. Точку пересечения m с IK назовём X, а точку пересечения с HL назовём Y. Проведём луч CX, точку его пересечения с AB назовём P. Построим луч PM, точку его пересечения с CD назовём Q. Отрезок PQ искомый. Действительно, $CX = XP$ (в треугольнике ACB средняя линия IK делит отрезок CP пополам). Значит, XY — средняя линия треугольника PCD, и она делит отрезок PQ пополам.

Замечание 1. В отличие от большинства задач этого занятия, где искомым множеством точек является линия, в этой задаче получается часть плоскости — двумерная фигура. Это происходит потому, что положение «рисующей» точки здесь задаётся двумя точками, а не одной (см. также задачу 5).

Замечание 2. Интересно рассмотреть аналогичную конструкцию в стереометрии. Пусть AB и CD — скрещивающиеся отрезки *в пространстве*. Тогда $ABCD$ — тетраэдр, а множество середин отрезков PQ лежит на сечении этого тетраэдра, проходящем через середины рёбер AC, BC, AD и BD.

Задачи для самостоятельного решения

Указания школьникам. В этих задачах нужно построить, а затем изучить множество точек или линий. Чтобы выдвинуть гипотезу о виде множества, попытайтесь описать его в терминах исходных данных задачи. Отрезок удобно задавать двумя концами, а окружность — диаметрально противоположными точками или центром и радиусом. Изучая эллипс, полезно определить его центр, а изучая двумерную фигуру, надо понять, какая у неё граница. Гипотезу нужно подкрепить с помощью построений и измерений, сдать учителю и доказать на бумаге. Если вы можете доказать гипотезу сразу, то подкреплять её необязательно.

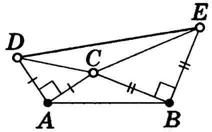
3. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности от центра отложен отрезок OX, равный перпендикуляру, проведённому из точки M к прямой AB. Найдите множество точек X.

4 (ч). Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Точки Q и P одновременно начинают движение с равными скоростями: Q по отрезку AB из вершины A, а P — по отрезку BC из вершины B. а) Найдите траекторию середины отрезка PQ. б*) Постройте траекторию самого отрезка PQ и найдите огибающую.

5. Найдите множество середин отрезков, у которых один конец лежит на одной данной окружности, а другой — на другой данной окружности (радиусы окружностей разные).

6*. По данным прямым AB и AC двигаются вершины D и E двух острых углов жёсткого прямоугольного треугольника DEF. Какова траектория точки F в зависимости от градусной меры угла A?

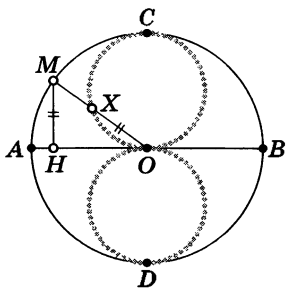
7. Даны фиксированный отрезок AB и подвижная точка C вне его. Точки D и E — вершины прямоугольных равнобедренных треугольников CAD и CBE (см. рисунок). Постройте множество отрезков DE и найдите их общее свойство.



Решения

3. Эксперимент. Строим окружность с центром O, диаметр AB, радиус OM, перпендикуляр MH. Строим окружность с центром O и радиусом, равным MH. На пересечении этой окружности с отрезком OM отмечаем точку X и просим её оставлять живой след при движении точки M по окружности. Траектория точки X похожа на две *окружности с диаметрами OC и OD* (CD — диаметр исходной окружности, перпендикулярный AB). Для подкрепления гипотезы построим эти окружности — они совпадут с траекторией. При вариациях исходной окружности совпадение сохранится.

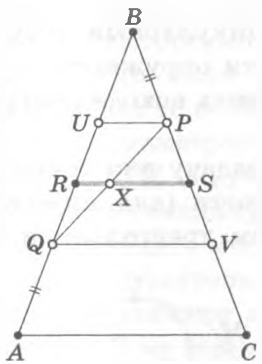
Решение. Решим задачу для точки M, принадлежащей верхней полуокружности (для нижней рассуждения аналогичны). Рассмотрим треугольники OCX и MOH (H —



основание перпендикуляра, опущенного из точки M на AB). Они равны, так как $OC = OM$ как радиусы, $OX = MH$ по условию, угол COX равен углу OMH как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых OC и MH секущей OM. Следовательно, угол CXO равен углу MHO и является прямым. Значит, точка X принадлежит множеству точек, из которых отрезок CO виден под прямым углом. Поскольку $MH = OX$ пробегает все значения от 0 до OC, любая точка множества нам подходит. Также в наше множество входят точки O и C (когда M совпадает с A и с C соответственно). Значит, ответом является окружность с диаметром OC.

4. а) **Эксперимент.** Проведём окружность с центром в точке B, отметим на ней две точки A и C, отметим треугольник ABC и скроем окружность.

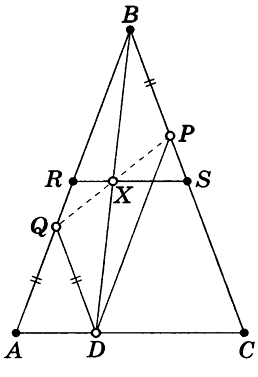
Чтобы добиться равенства отрезков BP и AQ, можно сделать так: отметим произвольную точку P на отрезке BC, а затем проведём из точки A окружность радиусом BP. На пересечении окружности с отрезком AB поставим точку Q. Отметим X — середину отрезка PQ и попросим её оставлять след. Перемещая точку P, увидим траекторию точки X. Она



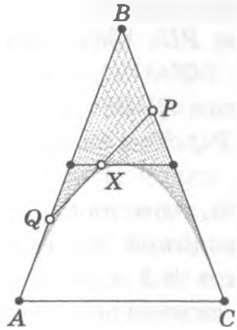
похожа на *среднюю линию треугольника*. Чтобы подкрепить гипотезу, отметим середины сторон AB и BC, соединим их отрезком и попросим точку X строить живой след при движении точки Q. Живой след совпадает с этим отрезком при шевелениях треугольника ABC.

Решение. 1. Проведём среднюю линию треугольника RS, а также отрезки QV и PU, параллельные основанию AC. Поскольку $BP = BU = AQ = VC$, получаем, что RS также и средняя линия трапеции $QVPU$. Следовательно, она делит пополам её диагональ PQ. Тем самым любая точка X лежит на отрезке RS.

2*. Теперь докажем, что любая точка X средней линии RS является серединой какого-то из отрезков PQ. Вспомним, что в задаче 3.1 к нужному построению приводила центральная симметрия относительно середины отрезка. Продлим отрезок BX на его длину за точку X, отметим точку D. Она попадёт на основание AC, поскольку точка X лежит на средней линии. Проведём через D прямые, параллельные BC и AB, на пересечении со сторонами AB и BC отметим точки Q и P соответственно. Поскольку $BPDQ$ — параллелограмм, а X — середина диагонали BD, точка X также является и серединой диагонали QP. Поскольку треугольник AQD равнобедренный, $AQ = QD = BP$.

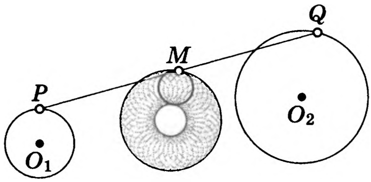


б*) **Эксперимент.** Попросим оставлять след сам отрезок PQ (удобно задать ему светлый цвет, отличный от цвета его середины X, чтобы два множества отличались визуально). Получим закрашенную область с *огибающей в виде параболы*. Её «параболичность» можно проверить, построив конику по пяти точкам, лежащим на огибающей (три из них — это A, C и середина отрезка RS). Доказывать



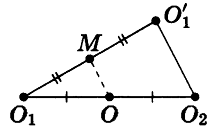
этот факт мы не будем (аналогичный результат доказан в задаче [10, № 31.66]).

5. Эксперимент. Построим окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 (пусть $R_1 < R_2$). Отметим на первой окружности точку P, а на второй — точку Q. При фиксированной точке Q и движении точки P по первой окружности середина M отрезка PQ «заметает» окружность. Оживим эту окружность, попросим её саму оставлять след и сделаем оборот точкой Q по второй окружности. Получим *кольцо между двумя концентрическими окружностями*. Нетрудно проверить, что *центр этих окружностей находится в середине отрезка O_1O_2*. Чтобы догадаться, какие радиусы у этих окружностей, рассмотрим два частных случая. Если первую окружность стянуть в точку, то кольцо стянется в окружность радиуса $\frac{R_2}{2}$. Если же уравнять радиусы окружностей, то кольцо превратится в круг того же радиуса. Отсюда можно предположить, что радиусы граничных окружностей кольца равны $\frac{R_1 + R_2}{2}$ и $\frac{R_2 - R_1}{2}$. Построим эти окружности — они совпадут с границами кольца. При изменении данных окружностей совпадение сохранится, что подкрепляет гипотезу.



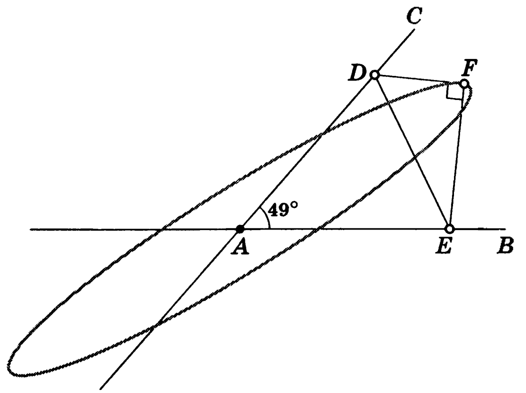
Решение 1 (через гомотетию). Назовём кольцом множество точек M, для которых расстояние до точки O удовлетворяет паре неравенств $\frac{R_2-R_1}{2} \leqslant OM \leqslant \frac{R_1+R_2}{2}$. Когда точка Q фиксирована, а точка P пробегает первую окружность, мы получаем окружность радиуса $\frac{R_1}{2}$ с центром S в середине отрезка QO_1 (гомотетия с центром Q и коэффициентом $\frac{1}{2}$). Когда точка Q пробегает вторую окружность, точка S пробегает окружность радиуса $\frac{R_2}{2}$ с центром в точке O — середине отрезка O_1O_2 (гомотетия с центром O_1 и коэффициентом $\frac{1}{2}$). Обозначим эту окружность ω. Искомое множество представляет собой объединение окружностей радиуса $\frac{R_1}{2}$, центры S которых лежат на окружности ω. Докажем, что указанное объединение окружностей является кольцом. Пусть M — произвольная точка окружности ω. В силу неравенства треугольника $|OS-SM| \leqslant OM \leqslant OS+SM$. Поскольку $OS = \frac{R_2}{2}$, $SM = \frac{R_1}{2}$, получаем, что точка M лежит в кольце. Обратно, пусть M — произвольная точка кольца. Докажем, что она лежит на одной из окружностей ω. Проведём из точки M как из центра окружность радиуса $\frac{R_1}{2}$, она коснётся окружности ω или пересечёт её (поскольку «ширина» кольца равна $\frac{R_1+R_2}{2} - \frac{R_2-R_1}{2} = R_1$). Обозначим одну из точек пересечения через S. Итак, построена окружность с центром S и радиусом $\frac{R_1}{2}$, которая принадлежит нашему множеству и содержит точку M.

Решение 2 (через центральную симметрию). Чтобы точка M была серединой какого-то отрезка PQ, необходимо и достаточно, чтобы на двух окружностях нашлись две точки, центрально-симметричные относительно M. А это равносильно тому, чтобы образ первой окружности при симметрии относительно M имел общие точки со второй окружностью (ср. задачу 3.1). При центральной симметрии окружность переходит в окружность того же радиуса, а центр — в центр (обозначим центр новой окружности через O_1'). Окружности с центрами O_1' и O_2 имеют общие точки тогда и только тогда, когда $R_2 - R_1 \leqslant O_1'O_2 \leqslant R_1 + R_2$. Поскольку MO — средняя линия треугольника $O_1O_1'O_2$, получаем, что $O_1'O_2 = 2MO$ (равенство верно и для точек O_1, O_2 и M на одной прямой), и утверждение доказано.



Замечание. Решение 1 опирается на эксперимент, формализуя понятие «заметать» с помощью объединения множеств. Задачу можно упростить, взяв две окружности одинакового радиуса

6. Эксперимент. Построим прямые AB и AC, а также прямоугольный треугольник-шаблон PQR с прямым углом R. Теперь нам надо построить треугольник DEF, равный PQR, так, чтобы точка D лежала на прямой AC, а точка E на прямой AB. Отметим произвольную точку D на прямой AC и проведём из неё окружность радиусом PQ. На пересечении окружности с прямой AB отметим точку E (если окружность не пересеклась с прямой, подвинем точку D ближе к вершине A). Достроим на отрезке DE треугольник DEF, равный PQR, так, что точки F и A лежат по разные стороны от прямой DF (например, с помощью двух окружностей). Выведем на экран градусную меру угла A. Попросим точку F строить живой след при движении точки D. Получим кривую, похожую на *половину эллипса*



с центром в точке A. Эту гипотезу можно подкрепить, отметив на кривой пять точек и построив по ним конику — траектория совпадёт с её частью. Меняя величину угла A, найдём случай, в котором кривая превратится в отрезок прямой, проходящей через точку A. Заметим, что в этом случае $\angle BAC = 90°$.

Решение. Докажем, что если угол BAC дополняет угол DFE до $180°$, то вершина F треугольника DEF движется по прямой. Проведём окружность через точки A, D, E. При указанном условии точка F лежит на этой же окружности, поэтому $\angle DAF = \angle DEF$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу DF. Но угол DEF фиксирован как угол жёсткого треугольника, поэтому и $\angle DAF = \mathrm{const}$.

Приведём план доказательства того факта, что если угол BAC не дополняет угол DFE до $180°$, то вершина F треугольника DFE движется по эллипсу с центром в точке A.

а) Снова проведём окружность ω_1 через точки A, D, E. Она имеет фиксированный радиус.

б) Окружность ω_1 катится без проскальзывания изнутри окружности ω_2 с центром A и вдвое большим радиусом.

в) Концы любого диаметра окружности ω_1 движутся по двум взаимно перпендикулярным диаметрам ω_2 (теорема Коперника).

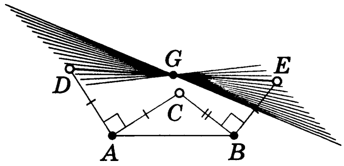
г) Соединим центр G окружности ω_1 с точкой F. Точка F — фиксированная точка на диаметре (или на продолжении диаметра).

Тогда по задаче 1а) получим, что точка F вычерчивает эллипс.

Пункты плана удобно иллюстрировать и подкреплять построениями на подвижном чертеже.

Замечание. Можно вместо прямоугольного треугольника взять равносторонний треугольник DEF, тогда при угле A в $120°$ вершина F будет двигаться по прямой, а при угле $150°$ — по окружности (поскольку окружность, проходящая через точки D, A, E, будет иметь центр F). Приведённый план доказательства работает для произвольного треугольника.

7. Эксперимент. Построим конструкцию, указанную в условии (удобно применить поворот на 90° отрезков AC и BC относительно точек A и B соответственно). Будем двигать точку C. Длина и положение отрезка DE при этом меняются. Но если попросить отрезок DE оставлять след, то увидим, что множество отрезков DE имеет одну общую точку. Отметим G — середину отрезка DE, она совпадёт с этой точкой. Чтобы определить положение точки G относительно отрезка AB (а больше фиксированных точек у нас нет), поместим C в середину отрезка AB. Тогда G окажется *вторым концом средней линии четырёхугольника $ABED$.* Это же будет верно и в общем случае.

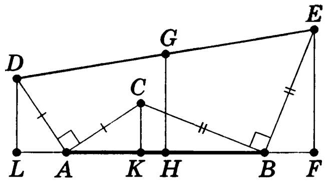


Подсказка к решению. Опустите перпендикуляры из точек C, D, E на прямую AB и найдите равные треугольники.

Решение. Докажем, что положение точки G не зависит от выбора точки C. Опустим на AB перпендикуляры EF, GH, CK и DL. Заметим, что треугольник DLA равен треугольнику AKC по катету и острому углу. Аналогично равны треугольники EFB и BKC. Значит, $DL + EF = AK + KB = AB = \text{const}$. Далее, $GH \parallel DL \parallel EF$ и G — середина ED, поэтому GH — средняя линия трапеции $LDEF$, а значит,

$$GH = \frac{DL + EF}{2} = \frac{AB}{2} = \text{const}.$$

Далее, H — середина LF, а значит, и середина AB (так как $LA = FB$). Итак, точка G занимает фиксированное положение относительно отрезка AB, независимо от точки C.



Замечание 1. Утверждение, обнаруженное в этой задаче, называется теоремой Боттемы. Приведённое доказательство годится только для случая, когда проекция точки C на прямую AB попадает внутрь отрезка AB. Приведём *набросок* доказательства того, что точка G остаётся на месте при произвольном сдвиге точки C. Заметим, что точка D получается из точки C поворотом на прямой угол против часовой стрелки относительно точки A, а точка E — поворотом на прямой угол по часовой стрелке относительно точки B. Пусть точка C сдвинулась на 1 вправо. Тогда точка D подвинулась на 1 вверх, а точка E — на 1 вниз. Тем самым точка G — середина отрезка DE — осталась неподвижной.

Замечание 2. По аналогии с множеством (геометрическим местом) точек можно говорить о множестве (геометрическом месте) линий. Геометрическое место линий явным образом требовалось построить в задачах 1 б), 4 б), 7, а также оно использовалось при решении задач 2 и 5.

См. также дополнительные задачи Д13 а), Д17, Д33—Д44.

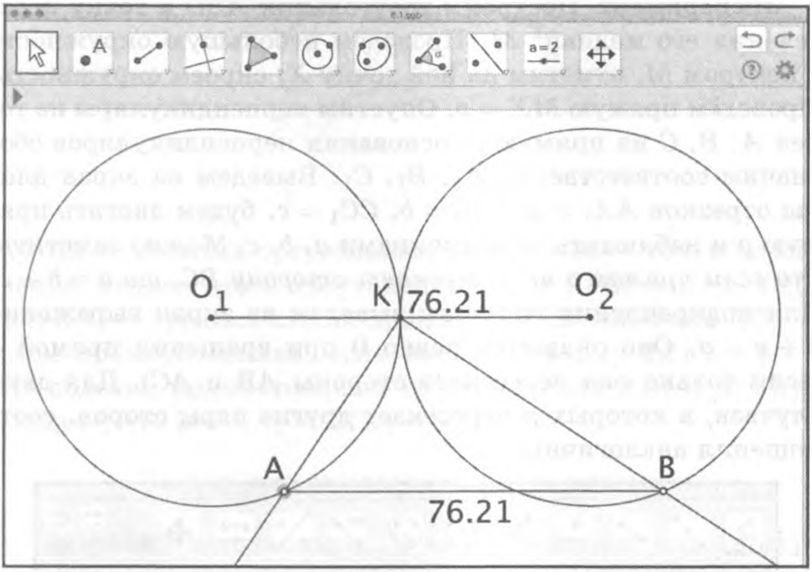
Занятие 6
Ищем взаимосвязи и инварианты

На занятии 4 мы научились находить характеристические свойства статичного чертежа, соответствующего экстремуму. На этом занятии мы будем искать свойства подвижного чертежа, т. е. общие свойства *серии* статичных чертежей. Речь пойдёт о равенстве углов и отрезков, постоянстве углов, отрезков и площадей, виде фигур.

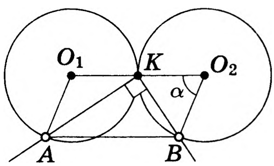
При ненаправленном поиске школьники могут найти в богатой конструкции такие закономерности, которых автор и учитель даже не предполагали, но могут и ничего не найти. Поэтому общие вопросы сформулированы только в задачах 1 и 2, которые учитель решает в диалоге со школьниками. А в задачах для самостоятельного решения типы величин, которые надо искать, заданы более конкретно.

1 (ч). Две окружности равного радиуса касаются друг друга в точке K. Стороны прямого угла с вершиной K пересекают одну окружность в точке A, а другую — в точке B. Что в этой конструкции сохраняется при движении точки A по окружности?

Эксперимент. Построим окружность произвольного радиуса с центром O_1, отметим на ней точку K. Проведём вспомогательную окружность с центром K, проходящую через O_1. Построим луч O_1K, на его пересечении со вспомогательной окружностью отметим точку O_2. Проведём окружность с центром O_2 через точку K. Скроем вспомогательную окружность. Проведём луч KA (точка A лежит на первой окружности), проведём перпендикулярно ему прямую через точку K, на ней выделим луч KB (точка B лежит на второй окружности). Будем двигать точку A по окружности. Заметим, что *отрезок AB остаётся равен и параллелен себе*, а также параллелен отрезку O_1O_2. Выведя на экран длины отрезков, обнаруживаем, что $AB = O_1O_2$. Проведя через точку A прямую, параллельную O_1O_2, увидим, что эта прямая проходит через точку B, чем подкрепим гипотезу.

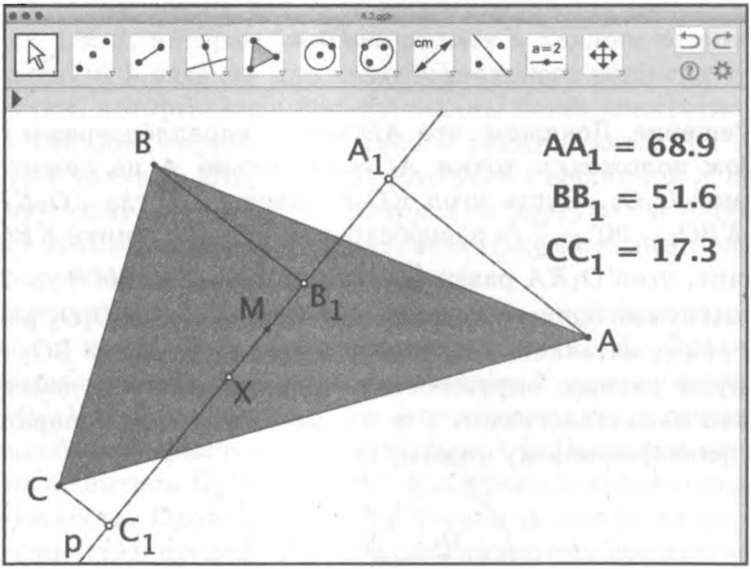


Решение. Докажем, что ABO_2O_1 — параллелограмм при любом положении точки A, если только A не лежит на прямой O_1O_2. Пусть угол KO_2B равен α. Тогда $\angle O_2KB = \angle KBO_2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (в равнобедренном треугольнике KBO_2). Значит, угол O_1KA равен $\frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle KO_1A = 180^\circ - \alpha$. Тем самым сумма односторонних углов при секущей O_1O_2 равна 180°, следовательно, $AO_1 \parallel BO_2$. Кроме того, $AO_1 = BO_2$ как радиусы равных окружностей. Значит, ABO_2O_1 действительно параллелограмм, т. е. отрезок AB равен и параллелен фиксированному отрезку O_1O_2.



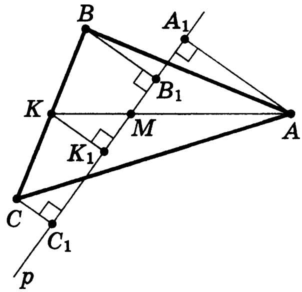
2. Через точку M пересечения медиан треугольника ABC проходит прямая p. Расстояния от вершин A, B и C до этой прямой равны a, b и c соответственно. Найдите связь между a, b и c.

Эксперимент. Построим треугольник ABC и точку пересечения его медиан[1] M. Проведём небольшую окружность с центром M, отметим на ней точку X, скроем окружность. Проведём прямую $MX = p$. Опустим перпендикуляры из точек A, B, C на прямую p, основания перпендикуляров обозначим соответственно A_1, B_1, C_1. Выведем на экран длины отрезков $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, будем двигать прямую p и наблюдать за величинами a, b, c. Можно заметить, что *если прямая p не пересекает сторону BC, то $a = b + c$.* Для подкрепления гипотезы выведем на экран выражение $b + c - a$. Оно окажется равно 0 при вращении прямой p (если только она пересекает стороны AB и AC). Для двух случаев, в которых p пересекает другие пары сторон, соотношения аналогичны.



Решение. Пусть K — середина стороны BC, K_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на p. Поскольку

[1] В «Геогебре» точку пересечения медиан можно быстро построить, применив инструмент «Середина или центр» к треугольнику.

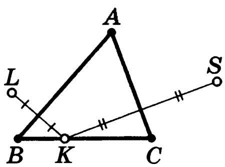


ку AK — медиана треугольника ABC, а M — точка пересечения медиан этого треугольника, $AM : MK = 2 : 1$. Отрезок KK_1 — средняя линия прямоугольной трапеции BB_1C_1C (или прямоугольника, если $b = c$). Поэтому $2KK_1 = b + c$. Из подобия прямоугольных треугольников AA_1M и KK_1M следует, что $a = AA_1 = 2KK_1 = b + c$.

Задачи для самостоятельного решения

Указания школьникам. В каждой задаче надо построить подвижный чертёж, обнаружить элементы или величины, которые при движении чертежа остаются неизменными (длины отрезков, углы) или связаны между собой соотношением (равны, лежат на одной прямой и т. д.), и доказать это.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка K. Точку K отразили относительно прямых AB и AC и получили точки L и S соответственно (см. рисунок). Укажите две равные стороны четырёхугольника $ASKL$ и два угла, которые не меняются при движении точки K по отрезку BC.



4. На сторонах угла A, равного $60°$, отмечены точки B и C. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BE и CH.

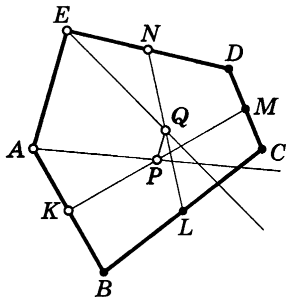
Рассматривая все отрезки, задаваемые точками A, B, C, E, H, найдите равные отрезки и постоянные углы при движении точек B и C.

5. Пусть D — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Определите вид четырёхугольника с вершинами в серединах сторон четырёхугольника $ABDC$ в зависимости от величины угла A.

6. Прямая p проходит через вершину A параллелограмма $ABCD$, причём параллелограмм лежит по одну сторону от данной прямой. Расстояния от вершин B и D до прямой p равны b и d. Найдите расстояние от вершины C до прямой p.

7. Известно, что если на сторонах квадрата наружу построить четыре квадрата, то их центры окажутся вершинами квадрата. На сторонах каких ещё выпуклых четырёхугольников можно построить наружу четыре квадрата так, что их центры также будут вершинами квадрата?

8. В произвольном пятиугольнике $ABCDE$ соединили отрезком середины сторон AB и CD, а также середины сторон BC и DE. Середины двух полученных отрезков P и Q снова соединили. Провели лучи AP и EQ (см. рисунок). Точки A и E двигаются произвольным образом. Найдите свойства отрезка PQ.

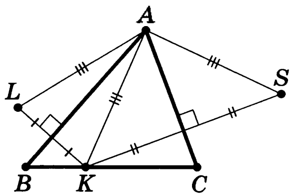


Решения

3. Эксперимент. Проведём указанные построения, выведем на экран длины сторон и градусные меры углов четырёхугольника $ASKL$. Будем двигать точку K по отрезку BC. Увидим, что *стороны AL и AS равны друг другу* (и равны диагонали AK), а *углы LAS и LKS не меняются* при движении точки K.

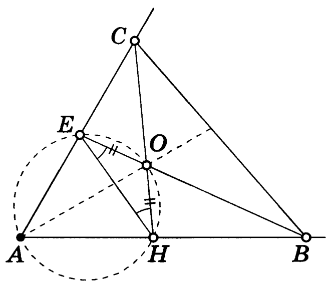
Подсказка к решению. Измерьте угол BAC, сравните с углом LAS.

Решение. По построению отрезок AL симметричен отрезку AK относительно прямой AB, поэтому $AL = AK$, $\angle LAB = \angle BAK$. Аналогично $AS = AK$, $\angle SAC = \angle CAK$. Следовательно, $AL = AK = AS$, $\angle LAS = 2(\angle BAK + \angle KAC) = 2\angle BAC = \text{const}$. Кроме того, $\angle LKS = 180° - \angle BAC = \text{const}$ (эти углы входят в четырёхугольник с двумя прямыми углами).



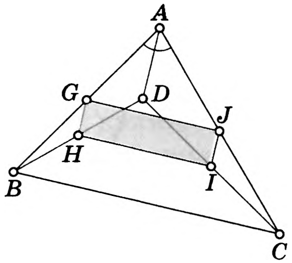
Замечание. В этой несложной задаче демонстрируются два разных типа величин: 1) *инварианты* — величины, не зависящие от точки K (углы), 2) *равные* — величины, зависящие от точки K, но равные друг другу при любом её положении (стороны).

4. Эксперимент. Выполним указанные построения (точки B и C — потомки угла A!), отметим O — точку пересечения биссектрис BE и CH. Двигая точки B и C по сторонам угла, заметим, что *треугольник OHE похож на равнобедренный*. Выведя на экран длины сторон и градусные меры углов треугольника OHE, увидим, что $OH = OE$, $\angle EHO = \angle HEO = 30°$, $\angle EOH = 120°$ и это сохраняется при движении точек B и C.

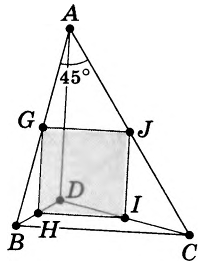


Решение. Имеем $\angle EOH = \angle BOC = 180° - (\angle OCB + \angle OBC) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 120°$. Поскольку $\angle EOH + \angle BAC = 180°$, четырёхугольник $AHOE$ вписанный. Углы EAO и EHO опираются на одну дугу и равны. Поскольку AO — биссектриса угла BAC, эти углы равны 30°. Аналогично $\angle HAO = \angle HEO = 30°$.

5. Эксперимент. Построим треугольник ABC, отметим его ортоцентр D, отметим G, H, I, J — середины сторон четырёхугольника $ABDC$ (см. рисунок). Четырёхугольник $GHIJ$

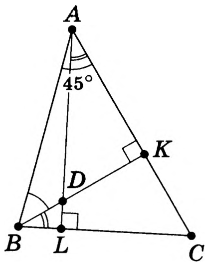


похож на ***прямоугольник***. Выведем на экран его длины сторон и градусные меры углов, а также величину угла BAC. Будем менять её от 0 до 90° и следить за четырёхугольником $GHIJ$ — его углы действительно прямые. При $\angle A = 45°$ его стороны сравняются и он превратится в ***квадрат***.



Решение. В четырёхугольнике $GHIJ$ стороны GH и IJ являются средними линиями треугольников ABD и ACD, поэтому они равны половине отрезка AD и параллельны ему. Стороны JG и IH являются средними линиями треугольников ABC и DBC, поэтому они равны половине отрезка BC и параллельны ему. Поскольку D — ортоцентр,

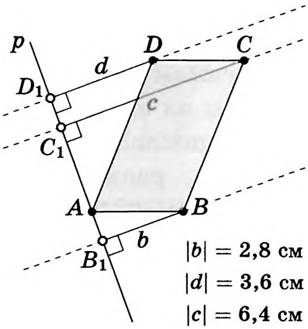
$AD \perp BC$, следовательно, четырёхугольник $GHIJ$ является прямоугольником.



Теперь пусть $\angle A = 45°$. Обозначим через AL и BK высоты треугольника ABC. Треугольник BKA прямоугольный с углом $45°$, следовательно, $BK = AK$. Рассмотрим прямоугольные треугольники BKC и AKD. Они равны по катету ($AK = BK$) и острому углу ($\angle DAK = \angle KBC$ как острые углы прямоугольных треугольников KBC и LAC с общим углом C). Следовательно, $BC = AD$ и прямоугольник $GHIJ$ является квадратом.

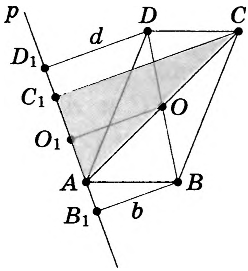
Замечание. Интересно, что *соотношение сторон* прямоугольника $GHIJ$ зависит только от угла A и не зависит от сторон AB и AC.

6. Эксперимент. Построим параллелограмм $ABCD$, проведём прямую p через вершину A. С помощью перпендикулярных прямых построим проекции точек B, C и D на прямую p — обозначим их B_1, C_1 и D_1 соответственно. Выведем на экран $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, $DD_1 = d$ и будем вращать



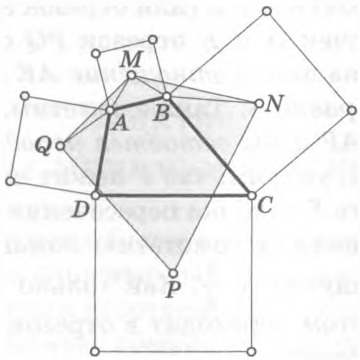
прямую p вокруг точки A. Можно заметить, что $c = b + d$, пока прямая p не пересекает параллелограмм. Для подкрепления гипотезы выведем на экран выражение $b + d - c$. Оно окажется равным 0 при указанном условии.

Решение. Отметим точку O — центр параллелограмма $ABCD$ и точку O_1 — его проекцию на прямую p. Точка O — середина диагоналей AC и BD, $OO_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. Поэтому OO_1 — средняя линия треугольника ACC_1, следовательно, $2OO_1 = CC_1 = c$. Также OO_1 — средняя линия трапеции BB_1D_1D (или прямоугольника, если $b = d$), поэтому $2OO_1 = BB_1 + DD_1 = b + d$. Отсюда $c = b + d$.

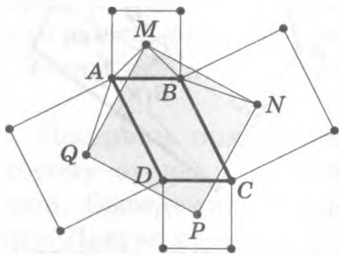


Замечание. Можно упростить задачу, взяв вместо параллелограмма прямоугольник или даже квадрат. Также можно усложнить задачу, попросив описать связь между b, c и d в зависимости от взаимного расположения параллелограмма и прямой p (ср. задачу 2).

7. Эксперимент. Построим четырёхугольник $ABCD$, на его сторонах наружу построим четыре квадрата, отметим их центры (как середины диагоналей), обозначим их M, N, P, Q, как на рисунке. На отрезке QM как на стороне построим пробный квадрат (сделаем его пунктирным) и будем следить за совпадением двух остальных его вершин с центрами P и N. Выведем на экран длины сторон четырёхугольника $ABCD$. Стоит последовательно проверить типы четырёхугольников $ABCD$, расположенных по убыванию «правильности», например: прямоугольник — ромб — параллелограмм — трапеция — произвольный четырёхугольник. Для параллелограмма $ABCD$ ещё будет получаться квадрат, а для трапеции — уже нет.



Решение. Докажем, что *центры M, N, P, Q квадратов, построенных на сторонах параллелограмма ABCD, являются вершинами квадрата.* (Ромб и прямоугольник являются частными случаями параллелограмма.) Заметим, что треугольники AMB, BNC, CPD, DQA прямоугольные и равнобедренные. Обозначим угол DAB через α (пусть он острый), тогда $\angle QAM = \alpha + 90°$. Аналогично $\angle MBN = \alpha + 90°$. Заметим, что $AM = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Далее, $AQ = \frac{AD}{\sqrt{2}}$, $BN = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, значит, $AQ = BN$. Получаем, что треугольники QAM и NBM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $QM = MN$, $\angle AMQ = \angle BMN$. Следовательно, угол QMN равен углу AMB и является прямым. Аналогично доказывается равенство всех сторон и углов четырёхугольника $QMNP$.



Замечание. Родственные конструкции изучаются в задачах 8.1 и Д53.

8. Эксперимент. Выполним указанные построения, обозначим середины сторон через K, L, M и N, как на рисунке, и будем двигать точки A и E (или отрезок AE). Заметим, что при движении точек A и E отрезок PQ остаётся параллелен AE. Выведя на экран *отношение* $AE : PQ$, увидим, что оно постоянно и *равно* 4. Также заметим, что *точка F пересечения лучей AP и EQ остаётся неподвижной.* Проведя отрезки BM и DL, увидим, что F лежит на их пересечении.

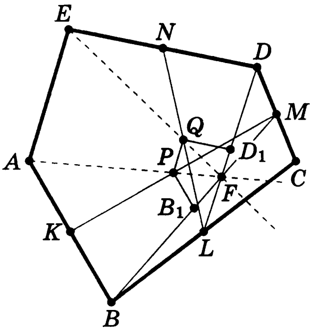
Решение. Пусть F — точка пересечения медиан треугольника BCD. Осуществим гомотетию ломаной $BAED$ с центром F и коэффициентом $\frac{1}{4}$. Как только мы докажем, что отрезок AE при этом переходит в отрезок PQ, мы докажем требуемое утверждение.

Пусть точка B переходит в B_1. Поскольку $BB_1 : B_1F = 4 : 1$, а $BF : FM = 2 : 1$ (теорема о медианах), получаем, что $BB_1 : B_1M = 1 : 1$.

Рассмотрим треугольник BKM. Отрезок B_1P — его средняя линия, поэтому $B_1P = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{4}BA$ и $B_1P \parallel BA$. Следовательно, отрезок BA при рассматриваемой гомотетии переходит в B_1P.

Аналогично точка D перейдёт в середину отрезка LD, а точка E — в точку Q.

Итак, отрезок AE при гомотетии переходит в отрезок PQ.



Замечание. Экспериментально обнаружив неподвижную точку F, мы получаем ключ к доказательству свойств отрезка PQ. Другой подход — ввести радиус-векторы пяти вершин, выразить через них векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{PQ}$ и доказать равенство $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{PQ}$.

См. также дополнительные задачи Д45—Д53.

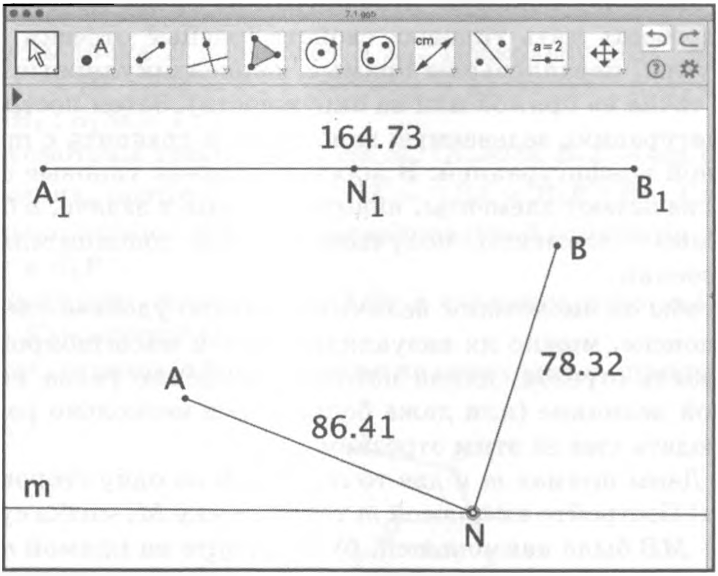
Занятие 7
Задачи на минимум и максимум-2

На этом занятии мы будем решать задачи на минимум и максимум, более сложные, чем на занятии 4. Вспомним методику выдвижения гипотезы: чтобы понять, какое свойство выделяет искомую конфигурацию среди других, надо перебрать пять типовых свойств (равные отрезки, равные углы, параллельные прямые, перпендикулярные прямые, точка на прямой или на окружности). Затем построить конфигурацию, задаваемую гипотезой, и сравнить с произвольной конфигурацией. В простых задачах типовые свойства связывают элементы, явно указанные в задаче, в более сложных — элементы, получаемые путём дополнительных построений.

Чтобы за числовыми величинами было удобнее следить при поиске, можно их визуализировать и масштабировать: построить отрезок, длина которого численно равна исследуемой величине (или даже больше её в несколько раз), и наблюдать уже за этим отрезком.

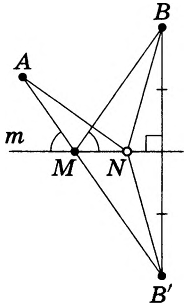
1. Даны прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. а) Постройте на прямой m такую точку M, чтобы сумма $AM + MB$ была наименьшей. б) Постройте на прямой m отрезок CD заданной длины так, чтобы длина ломаной $ACDB$ была наименьшей.

а) **Эксперимент.** Построим прямую m, отметим точки A и B по одну сторону от неё (на разных расстояниях) и точку N на прямой. Выведем на экран длины отрезков AN и NB и их сумму. Двигая точку N, будем наблюдать за суммой. Сначала хочется предположить, что сумма будет минимальна, когда N лежит посередине между проекциями точек A и B на прямую m. Однако эксперимент показывает, что чем больше отличаются расстояния от A до m и от B до m, тем дальше точка минимума от этой середины. Ищем дальше. Сумма кажется постоянной на некотором маленьком отрезке — это значит, что программе не хватает точности. Попросим программу показывать длины с бо́льшим числом знаков после запятой либо просто умножим сумму на 10 или 100 и локализуем минимум более точно. Какое свойство есть у конфигурации в случае, когда N совпадает с точкой минимума M? Похоже, что *угол между лучом MA и прямой m равен углу между лучом MB и прямой m*. Выведем на экран величины указанных углов — они окажутся равны с хорошей точностью.



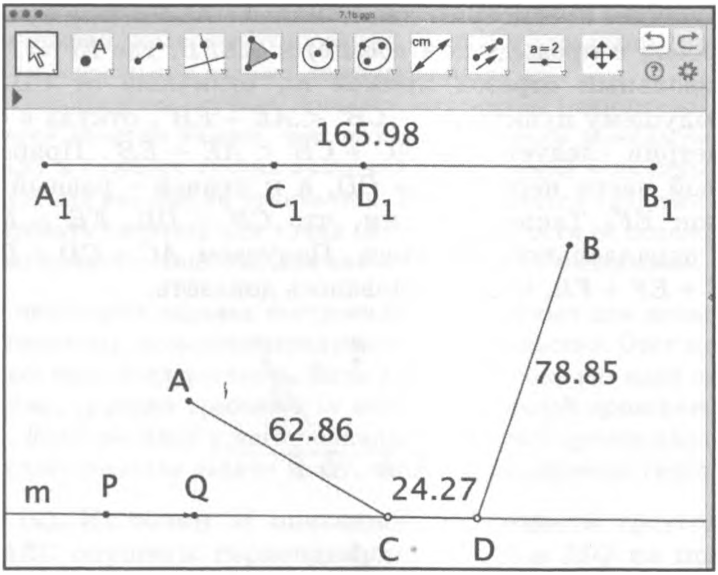
Чтобы подкрепить гипотезу, *построим* точку, для которой указанные углы равны. Для этого построим точку B', симметричную точке B относительно прямой m, проведём отрезок AB' и отметим точку M пересечения AB' с прямой m. Переместим туда точку N и увидим, что минимум достигается в этой точке. Изменим положение точек A и B относительно m и повторим проверку — гипотеза вновь подтвердится. Можно также убедиться, что $AM + MB = AB'$.

Решение. Рассмотрим две ломаные: AMB (где точка M построена в предыдущем абзаце) и ANB, где N — произвольная точка прямой m, отличная от M. По неравенству треугольника $AM + MB' = AB' < AN + NB'$. Теперь заметим, что в силу симметрии $B'M = BM$, а $B'N = BN$. Поэтому $AM + MB = AB' < AN + NB$.



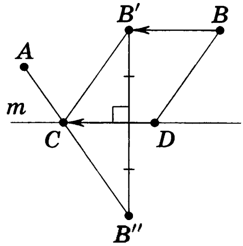
Замечание. Замеченное свойство равенства углов напоминает закон распространения света: угол отражения равен углу падения. Это не случайно, ведь согласно принципу Ферма в однородной среде свет распространяется из точки A в точку B по кратчайшему пути.

б) Эксперимент. Построим прямую m, принадлежащий ей отрезок PQ, отметим точки A и B по одну сторону от пря-

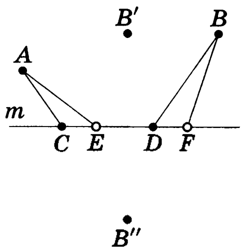


мой (на разных расстояниях) и точку C на прямой. Сделаем перенос точки C на вектор $\overrightarrow{PQ}$, так что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ}$. Выведем на экран длины отрезков AC, CD и DB и их сумму, будем двигать точку C по прямой. Заметим, что для минимальной длины ломаной $ACDB$ выполняется то же свойство, что и в пункте а), а именно: *угол между AC и прямой m равен углу между DB и прямой m.* Выведем величины углов на экран и убедимся в этом.

Как построить такую ломаную? Перенесём B на вектор $-\overrightarrow{PQ}$ — получим точку B', отобразим B' симметрично относительно m — получим точку B''. Построим отрезок AB'', на его пересечении с m отметим точку C.



Решение. Рассмотрим две ломаные: $ACDB$ (где точка C построена в предыдущем абзаце) и $AEFB$, где $EF = PQ$ — произвольный отрезок прямой m, отличный от CD. По предыдущему пункту $AC + CB'' < AE + EB''$, откуда в силу симметрии следует, что $AC + CB' < AE + EB'$. Прибавим к левой части неравенства CD, а к правой — равный ему отрезок EF. Также заметим, что $CB' = DB$, $EB' = FB$ в силу параллельного переноса. Получаем $AC + CD + DB < < AE + EF + FB$, что и требовалось доказать.



Заметим, что мы решили задачу композицией двух преобразований — симметрии и параллельного переноса, она ещё называется *скользящей симметрией*.

Замечание. В этих задачах в силу квадратичной зависимости вблизи максимума или минимума величина меняется слабо, поэтому экспериментально мы находим не точку, а отрезок на прямой или область («кружок») на плоскости. Само по себе это не страшно — главное сделать эту область столь малой, чтобы можно было выдвинуть и проверить гипотезу. Аналогичная ситуация возникает в физических экспериментах: мы всегда получаем лишь приближённые результаты, и важно добиться нужной нам точности, чтобы выявить существенные эффекты.

Как можно уточнить результат эксперимента? Удобно сочетать визуальное и численное отображение оптимизируемой величины, делая грубую прикидку экстремума по длине отрезка, а более точный поиск — по числу (обычно хватает двух знаков после запятой). Полезно менять исходную конфигурацию, приводя к «наименее правильному» виду. Например, если в задаче 1 а) точки A и B находятся примерно на равном расстоянии от прямой m, то точка M, для которой углы (AM, m) и (BM, m) равны, окажется очень близко к середине отрезка между проекциями A и B на m. В этом случае мы не сможем с помощью эксперимента отдать предпочтение одной из этих гипотез, а значит, такая конфигурация неудачна для экспериментирования. Поэтому *проверять гипотезу надо на нескольких разных конфигурациях*.

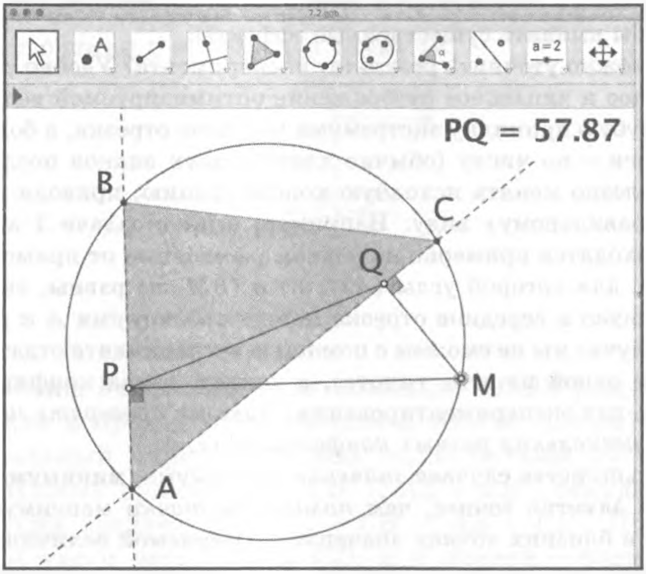
В большинстве случаев *значение* максимума (минимума) определяется заметно точнее, чем *положение точки* максимума, поскольку в близких точках значение проверяемой величины из-за округления внешне не отличается. Если окажется трудным сформулировать гипотезу для точки (из-за размытости её положения), можно начать с гипотезы для значения в точке максимума.

В некоторых задачах построения, проводимые для подкрепления гипотезы, помогают придумать доказательство. Этот ценный процесс надо поддерживать. Если у ученика пока нет идеи доказательства, то стоит требовать от него педантичной проверки гипотезы. Если же идея у него появилась, то пусть лучше продумает её и сдаёт решение задачи сразу, минуя подкрепление гипотезы.

2 (ч). Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые

AB и AC. При каком положении точки M длина отрезка PQ максимальна?

Эксперимент. Построим треугольник ABC, проведём окружность через его вершины, построим прямые AB и AC. Отметим на окружности точку M, опустим из неё перпендикуляры MP и MQ на лучи AB и AC, проведём отрезок PQ, построим равный ему отрезок $P'Q'$ отдельно от чертежа. Будем двигать точку M по окружности и искать максимум длины отрезка PQ. Он достигается, когда *точка P совпадает с B, а Q — с C.*



Решение. Почему выбором точки M мы можем совместить две пары точек одновременно? Заметим, что при восстановлении перпендикуляров из точек B и C к соответствующим прямым мы получим четырёхугольник $ABNC$ с двумя прямыми противоположными углами. Следовательно, он вписанный, т. е. точка N лежит на нашей окружности, а отрезок AN является её диаметром.

Теперь заметим, что четырёхугольник $APMQ$ (буквы могут идти в другом порядке) также вписанный, AM — диаметр окружности. По теореме синусов $PQ = AM \cdot \sin \angle PAQ$.

При любом положении точки M угол PAQ равен углу BAC либо смежному или вертикальному с ним, поэтому синус угла PAQ во всех случаях одинаков. Значит, наша задача максимизации PQ равносильна задаче максимизации AM. Но хорда AM исходной окружности является наибольшей, когда она совпадает с диаметром AN исходной окружности.

Замечание. Эксперимент позволяет легко обнаружить «косвенное» свойство искомой конфигурации (две пары точек совпадают), из которого с помощью рассуждений мы уже выводим сам ответ (искомая точка — конец диаметра AM). Такая схема, сочетающая экспериментальный и теоретический подходы, помогает при решении многих задач на экстремум.

Задачи для самостоятельного решения

3. (Вариант попроще.) На стороне острого угла с вершиной A дана точка B. Постройте на другой его стороне такую точку X, чтобы радиус описанной окружности треугольника ABX был наименьшим.

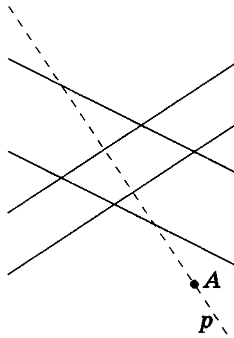
(Вариант посложнее.) Дан треугольник ABC. Найдите на прямой AB такую точку M, для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM будет наименьшей.

4. По разные стороны от реки расположены две деревни. Постройте перпендикулярно берегам реки мост так, чтобы Вася прошёл наименьший путь из одной деревни в другую, к себе домой. (Берега реки — две параллельные прямые, деревни — точки.)

5. Внутри окружности с центром O дана точка A. Найдите на окружности точку M, для которой угол OMA наибольший.

6. Даны две пары параллельных прямых и точка A (см. рисунок). Проведите через точку A прямую p так, чтобы отрезки, высекаемые на ней параллельными прямыми, были равны[1].

[1]Хотя эта задача не про экстремумы, однако и техника исследования, и методы доказательства тут такие же, как в других задачах этого занятия.

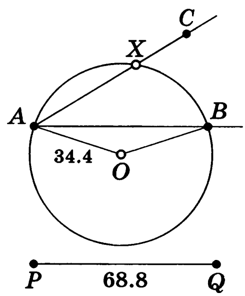


7. Заданы длины диагоналей четырёхугольника и угол между диагоналями. При каком взаимном расположении диагоналей периметр четырёхугольника будет наименьшим?

8*. Дан квадрат. Проведите в его плоскости прямую так, чтобы сумма *квадратов* расстояний от вершин квадрата до прямой была минимальна.

Решения

3. (Вариант попроще.) **Эксперимент.** Построим угол BAC, отметим на стороне AC точку X, проведём окружность, проходящую через три точки A, B, X. Построим центр окружности O[1] и проведём радиусы OA и OB. Чтобы за радиусом R было удобно следить, построим отрезок PQ, равный удвоенному радиусу. Будем перемещать точку X по стороне угла

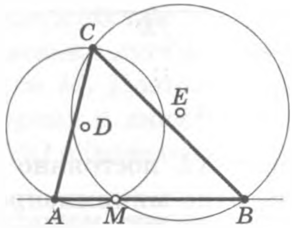


[1] В «Геогебре» это легко делается инструментом «Середина или центр».

и следить за длиной отрезка PQ. Минимум PQ (и радиуса) достигается, когда точка O лежит на луче AB, причём $2R = AB$.

Решение. Из неравенства треугольника (AOB) имеем $2R = AO + OB \geqslant AB$, причём точки A и B фиксированы, а O подвижна. Равенство достигается, когда точка O лежит на AB, т. е. когда *треугольник AXB прямоугольный* с гипотенузой AB. Значит, для построения треугольника AXB с наименьшим радиусом описанной окружности надо опустить перпендикуляр из точки B на сторону угла AC и отметить в основании перпендикуляра искомую точку X.

(Вариант посложнее.) **Эксперимент.** Построим треугольник ABC и прямую AB, отметим на прямой AB произвольную точку M, построим окружность, проходящую через точки A, C, M, и окружность, проходящую через точки B, C, M. Отметим центры окружностей, построим их диаметры, сложим их длины $2R_1$ и $2R_2$. Будем перемещать точку M по прямой и наблюдать за суммой диаметров. Она минимальна, когда центры окружностей попадают на стороны AC и BC, а сумма диаметров равна $AC + BC$.



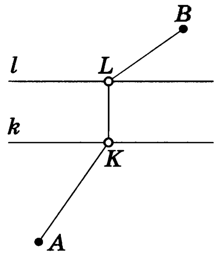
Решение. По обобщённой теореме синусов для треугольников ACM и BCM имеем

$$2R_1 = \frac{AC}{\sin \angle AMC} \geqslant AC, \quad 2R_2 = \frac{BC}{\sin \angle BMC} \geqslant BC.$$

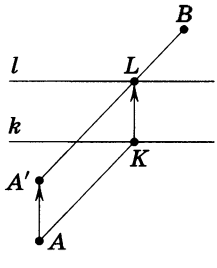
Равенства достигаются, когда $\sin \angle AMC = 1$ и $\sin \angle BMC = 1$, т. е. если $\angle AMC = 90°$. Таким образом, точка M — *основание высоты*, опущенной из вершины C.

Замечание. Другое решение сложного варианта легко вывести из простого варианта: радиусы обеих окружностей будут наименьшими, если $CM \perp AB$. Значит, и сумма радиусов достигает минимума в этом же случае.

4. Эксперимент. Проведём две параллельные прямые k и l, отметим точки A и B, как на рисунке (на разном расстоянии от прямых!). На прямой k отметим точку K, проведём через K прямую, перпендикулярную к l, на пересечении с прямой l поставим точку L. Путь равен $AK + KL + LB$. Выведем на экран эту сумму и будем двигать точку K, добиваясь минимальности суммы. Сначала хочется предположить, что минимум достигается, если прямая AB пересекает отрезок LK в его середине, однако аккуратные измерения опровергают это. Можно заметить, что при наименьшем пути *отрезки* AK *и* LB *составляют с прямыми* k *и* l *равные углы*. Для подкрепления гипотезы построим отрезок KL с таким свойством. По ходу построения этого отрезка родится и доказательство гипотезы.

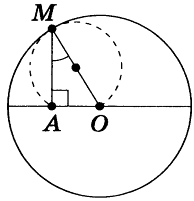


Решение. Поскольку KL постоянно (в силу параллельности прямых), достаточно минимизировать $AK + LB$. Перенесём точку A на вектор $\overrightarrow{KL}$ — получим точку A'. В силу параллельного переноса $AK = A'L$, следовательно, нам достаточно минимизировать $A'L + LB$. Но эту задачу мы



решать умеем — точка L должна лежать на пересечении отрезка $A'B$ с прямой l.

5. Эксперимент. Построим указанную конструкцию, выведем на экран градусную меру угла OMA и будем двигать точку M по окружности, пока не достигнем максимума. В этом положении *отрезок* MA *перпендикулярен* AO. Подкрепим гипотезу, проведя через точку A прямую, перпендикулярную к AO, и поместив точку M на пересечении прямой и окружности.

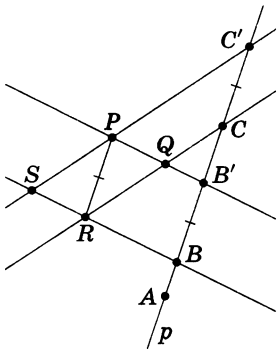


Решение 1. Множество точек P, для которых угол OPA постоянен, выглядит как пунктирная дуга на рисунке (показана только верхняя половина множества). Большему углу OPA соответствует меньший радиус дуги. Нам нужен наибольший угол, а значит, наименьший радиус, при котором дуга имеет с окружностью общую точку, т. е. касание в точке M. В силу касания дуга и окружность имеют общую касательную в точке M. Поэтому радиус OM окружности является в то же время и диаметром дуги. Следовательно, вписанный угол MAO опирается на диаметр MO, т. е. является прямым.

Решение 2. Запишем теорему синусов для треугольника AMO: $\dfrac{AO}{\sin M} = \dfrac{OM}{\sin A}$, а значит, $\sin M = \dfrac{AO}{OM}\sin A$. Поскольку AO и OM постоянны, $\sin M$ максимален, когда $\sin A$ максимален, т. е. при $A = 90^\circ$. Поскольку угол OMA острый, он принимает максимальное значение одновременно со своим синусом.

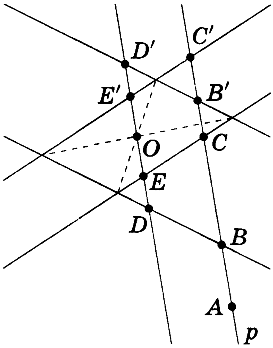
6. Эксперимент. Пусть данные прямые пересекаются в точках P, Q, R, S. Проведём через точку A как через предка прямую p, отметим на ней точки пересечения с двумя парами параллельных прямых, выведем на экран длины двух получившихся отрезков (или построим равные им отрезки, или выведем на экран модуль их разности). Будем вращать прямую p вокруг точки A, пока отрезки не станут равной длины. Как расположена эта прямая относительно исходных данных? Похоже, *прямая p параллельна диагонали четырёхугольника* (либо PR, либо QS). Для подкрепления гипотезы проведём через точку A две прямые, параллельные PR и QS, и выведем на экран длины отрезков, высекаемых на них параллельными прямыми, — они окажутся равны.

Решение 1. Обозначим точки пересечения прямой p с одной парой параллельных прямых через B и B', а со второй парой — C и C'. Четырёхугольник $PSRQ$ является параллелограммом. Пусть прямая p параллельна его диагонали PR. Тогда четырёхугольники $PRBB'$ и $PRCC'$ также являются параллелограммами. Значит, $CC' = PR = BB'$. Аналогично если прямая параллельна SQ, то $CC' = SQ = BB'$.



Пусть теперь прямая p не параллельна PR и SQ (а также четырём исходным прямым). Докажем, что в этом случае $BB' \neq CC'$. Обозначим через O точку пересечения отрезков PR и SQ и проведём через точку O прямую, параллельную p. Пусть она пересекает первую пару параллельных прямых в точках D и D', а вторую пару — в точках E и E' (см. рисунок). Заметим, что $BB'D'D$ и $CC'E'E$ — параллелограммы, причём $BB' = DD' \neq EE' = CC'$.

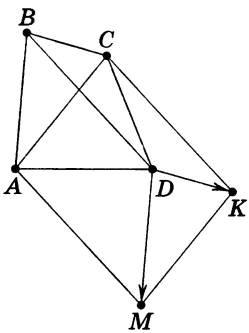
Решение 2. Предположим, что искомая прямая p построена, и обозначим длину равных отрезков через d. Назовём две параллельные прямые *парой*. Тогда параллельный пе-



ренос вдоль прямой p на расстояние d одновременно переводит одну из прямых каждой пары в другую прямую этой же пары. Следовательно, он переводит точку пересечения двух прямых из разных пар в точку пересечения двух других прямых из этих пар. Но таких параллельных переносов существует два — на вектор $\overrightarrow{RP}$ и на вектор $\overrightarrow{SQ}$. Каждому из них соответствует решение задачи.

Замечание. Решение 2 выглядит более изящно и демонстрирует преимущества метода движений.

7. Эксперимент. Нарисуем два (не равных) отрезка AC и BD, построим четырёхугольник $ABCD$, будем двигать отрезки (выделяя их стрелкой) и смотреть на периметр четырёхугольника. Похоже, он окажется наименьшим, когда диагонали пересекутся в общей середине. Целенаправленно проверим эту гипотезу: отметим и совместим середины диагоналей, запомним значение периметра при этом положе-



нии и подвигаем одну из диагоналей так, чтобы её середина «обошла» вокруг середины другой, оставаясь вблизи неё. Во всей двумерной окрестности периметр окажется больше. Итак, гипотеза: *среди четырёхугольников с заданными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.*

Решение. Отложим $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BA}$. Заметим, что $ACKM$ — параллелограмм, стороны которого равны и параллельны нашим отрезкам AC и BD. Теперь заметим, что периметр четырёхугольника $ABCD$ равен $AD + CD + KD + MD$. Тем самым задача минимизации периметра $ABCD$ сводится к задаче минимизации суммы расстояний от точки D до вершин четырёхугольника $ACKM$ (см. задачу 4.3). Значит, для минимизации периметра точка D должна лежать на пересечении отрезков AK и CM. Поскольку $ACKM$ — параллелограмм, имеем $AD = DK = BC$, $CD = DM = BA$. Следовательно, $ABCD$ также является параллелограммом.

Замечание. Самое сложное в этой задаче — придумать подходящее преобразование четырёхугольника, «меняющее местами стороны и диагонали». Чтобы оно выглядело естественнее, можно сначала дать такую вспомогательную задачу: «Внутри прямоугольника $EFGH$ взята точка Q. Докажите, что существует такой выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, что длины его диагоналей равны EF и FG, а длины сторон равны EQ, FQ, GQ и HQ».

8. Эксперимент. Построим квадрат, проведём произвольную прямую p, измерим расстояния между ней и каждой из четырёх вершин. Выведем на экран сумму квадратов этих расстояний S. Будем двигать прямую p и следить за суммой S. Заметим, что среди *прямых, проходящих через фиксированную точку вне квадрата, сумма S наименьшая, когда прямая p проходит через центр квадрата.* Подкрепим эту гипотезу, отметив центр квадрата (как середину диагонали).

Теперь нам надо выбрать среди прямых, проходящих через центр, ту, которая соответствует наименьшей сумме S. Для лучшей точности проведём новую прямую через центр (как через предка) и проделаем с ней ту же процедуру, что в предыдущем абзаце[1]. *Для всех прямых, проходящих через центр квадрата, сумма окажется постоянной*! Этот неожиданный результат нетрудно подкрепить подсчётом двух частных случаев: когда прямая проходит через две противоположные вершины квадрата и когда она параллельна стороне. Эксперимент выдаёт такое же значение и для всех промежуточных случаев.

Решение. Введём систему координат с началом в центре квадрата, осями, параллельными сторонам квадрата, и единичным отрезком, равным половине стороны квадрата. Тогда координаты вершин квадрата будут $(\pm1; \pm1)$. Зададим нашу прямую p уравнением $ax + by + c = 0$. Тогда расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой будет равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Найдём выражение для суммы квадратов расстояний от четырёх вершин квадрата до прямой в зависимости от a, b, c. Имеем

$$S = \frac{(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (-a-b+c)^2}{a^2+b^2} =$$
$$= \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2}.$$

При фиксированных a и b минимум этого выражения достигается при $c = 0$, что соответствует прямой, проходящей через начало координат (центр квадрата). При $c = 0$ значение выражения не зависит от a и b, т. е. для любой такой прямой сумма квадратов постоянна.

Замечание. Физически сумма квадратов расстояний точек до прямой k означает *момент инерции* системы материальных точек одинаковой массы относительно оси вращения k. Для вершин *любого правильного* многоугольника любая ось, лежащая в его плоскости и проходящая через центр симметрии, доставляет минимальный момент инерции.

См. также дополнительные задачи Д54—Д62.

[1]Для экономии времени можно создать новый инструмент, который по прямой и четырём точкам будет выводить величину S.

Занятие 8
Открытые задачи. Конференция

Это занятие рассчитано на вторую половину 9 класса, когда школьники изучили основные факты планиметрии и основные возможности программ динамической геометрии. В качестве повторения и обобщения предлагается изучить две подвижные конструкции со множеством свойств.

Это занятие удобно организовать в виде конференции. Школьники разбиваются на группы по два-три человека и выбирают по задаче, каждая группа одну из шести задач. Далее в течение 40—50 минут группы решают свои задачи и оформляют их решения на ватмане или на компьютере (пример оформления см. в конце главы). Затем в течение 20—30 минут происходит стендовая конференция, на которой один школьник из каждой группы докладывает решение, а другие слушают решения других команд, затем они меняются ролями.

Задачи 1—3 связаны с конструкцией «квадраты на сторонах треугольника», а задачи 4—6 — с конструкцией «прямая проходит через точку пересечения двух окружностей». Дополнительную интригу конференции придаёт тот факт, что, узнав решения «соседних» задач, можно придумать новые решения собственной задачи (это отражено в замечаниях). Полезно, чтобы ученики обнаружили это сами, слушая доклады друг друга, либо после комментариев учителя.

Можно решать эти задачи и более традиционным образом — индивидуально за компьютером со сдачей учителю (однако надо иметь в виду, что уровень задач в среднем выше, чем в предыдущих занятиях). Отличие такого занятия от обычного занятия с подвижными чертежами в том, что здесь учителю не обязательно разбирать вначале задачи-образцы. Для такого варианта работы удобнее использовать список задач, организованный так, что общие конструкции выделены явно (см. с. 183). В этом случае можно на компьютерном чертеже делать дополнительные построения на общей конструкции, а после решения соответствующего пункта убирать их и использовать чертёж для следующих пунктов.

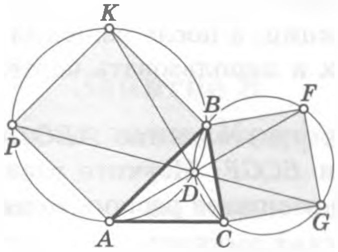
1. На сторонах треугольника ABC наружу построены квадраты $ABKP$ и $BCGF$. Изучите взаимосвязь *отрезков* AF и KC, а также взаимное расположение *прямых* AF, KC и PG.

Эксперимент. Построим треугольник и два квадрата на его сторонах (используем команду построения квадрата по двум смежным вершинам), проведём отрезки AF и KC. Будем двигать вершины треугольника и наблюдать за отрезками. Похоже, что *отрезки AF и KC равны и перпендикулярны*. Измерения подкрепляют эту гипотезу.

Теперь уберём отрезки, чтобы не загромождать чертёж, и проведём прямые AF, KC и PG. Сразу видно, что они пересекаются в одной точке — назовём её D. Двигая вершины треугольника, увидим, что *три прямые* по-прежнему *пересекаются в одной точке*, а также что *прямая PG делит угол CDF пополам*. Для подкрепления последней гипотезы можно построить биссектрису угла CDF — она пройдёт по прямой PG.

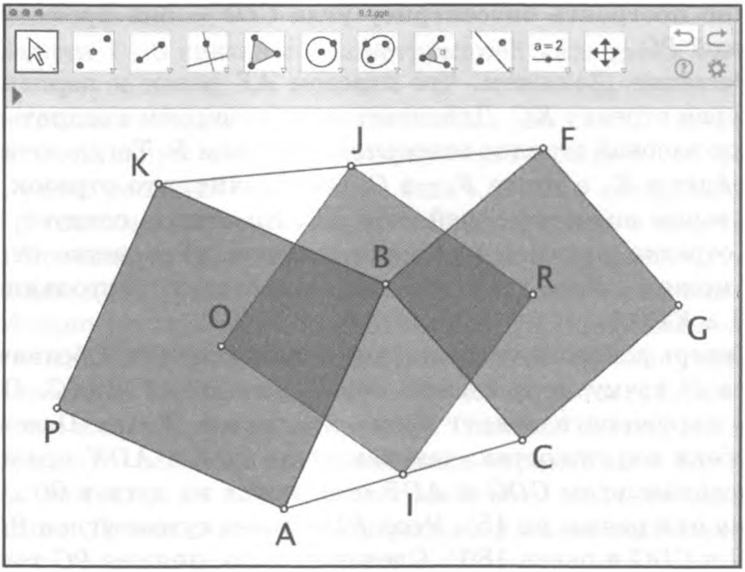
Решение. Докажем, что отрезок AF равен и перпендикулярен отрезку KC. Действительно, повернём квадраты на $90°$ по часовой стрелке относительно точки B. Тогда точка A перейдёт в K, а точка F — в C. Это значит, что отрезок AF при таком повороте перейдёт в KC. Но отсюда следует, что эти отрезки равны и перпендикулярны. (Равенство отрезков можно также доказать через равенство треугольников ABF и KBC.)

Теперь докажем утверждения о трёх прямых. Обозначим через D точку пересечения *двух* прямых AF и KC. Опишем окружности вокруг обоих квадратов. Точка D лежит на обеих окружностях, так как углы CDF и ADK прямые. Вписанные углы CDG и ADP опираются на дуги в $90°$, поэтому они равны по $45°$. Угол PDG равен сумме углов PDA, ADC и CDG и равен $180°$. Следовательно, прямая PG также проходит через точку D и делит угол CDF пополам.



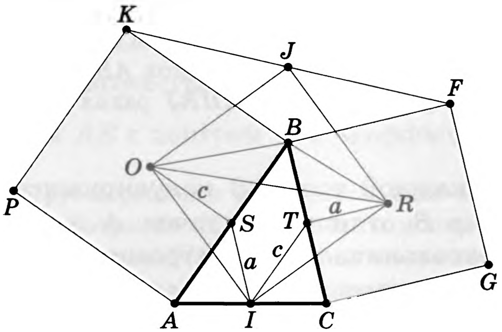
2. На сторонах треугольника ABC наружу построены квадраты $ABKP$ и $BCGF$. Отмечены точки I — середина отрезка AC и J — середина отрезка KF, а также центры квадратов O и R соответственно. Определите вид четырёхугольника $OIRJ$.

Эксперимент. Выполним указанные в условии построения (центр квадрата удобно строить как середину диагонали). Отметим четырёхугольник $OIRJ$, он похож на *квадрат*. Эту гипотезу можно подкрепить, построив «проверочный» квадрат со стороной OI — две другие его вершины совпадут с точками R и J.



Решение. Сначала докажем, что отрезки OI и IR равны и перпендикулярны.

Пусть S и T — середины отрезков AB и BC соответственно. Пусть $AB = 2c$, $BC = 2a$, $\angle ABC = \beta$. Тогда $SI = a$ как средняя линия треугольника ABC. Поскольку $TR = a$, получаем, что $SI = TR$. Аналогично $TI = c = SO$. Далее, $\angle ASI = \angle ABC = \angle ITC$, а значит, $\angle OSI = 90^\circ + \angle ABC = \angle ITR$. Поэтому треугольники OSI и RTI равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $OI = RI$.



Рассмотрим треугольник OBR и найдём из него $OR^2 : OB = c\sqrt{2}$, $BR = a\sqrt{2}$, $\angle OBR = \angle OBA + \angle ABC + \angle CBR = 90^\circ + \beta$. По теореме косинусов

$$OR^2 = OB^2 + BR^2 - 2OB \cdot BR \cos(90^\circ + \beta) = 2c^2 + 2a^2 - 4ac\cos(90^\circ + \beta).$$

Из треугольника OSI имеем $OI^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(90^\circ + \beta)$, тот же результат справедлив и для IR^2. Заметим, что $OI^2 + IR^2 = OR^2$, следовательно, угол OIR прямой.

Заметим, что наши квадраты можно также рассматривать как построенные на сторонах треугольника KBF. Аналогично предыдущему можно доказать, что отрезки OJ и JR равны и перпендикулярны. Это означает, что четырёхугольник $OIRJ$ составлен из двух прямоугольных равнобедренных треугольников, совмещённых гипотенузами. Следовательно, $OIRJ$ — квадрат.

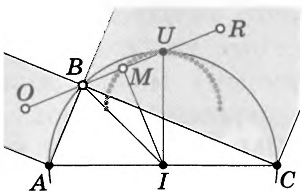
Замечание. Задачу 2 легко решить, используя результат задачи 1. Действительно, в четырёхугольнике $ACFK$ точки O, I, R, J

являются серединами сторон, а отрезки AF и KC — диагоналями. Значит, стороны четырёхугольника $OIRJ$ равны половинам диагоналей четырёхугольника $ACFK$ и параллельны им. Но по задаче 1 отрезки AF и KC равны и перпендикулярны, поэтому $OIRJ$ — квадрат.

Результат задачи 2 называется *теоремой Финслера—Хадвигера* (Finsler—Hadwiger): если два квадрата $ABKP$ и $BCGF$ имеют общую вершину B, то середины сторон четырёхугольника $ACFK$ образуют квадрат. Из этой теоремы, в частности, легко вывести, что центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма, являются вершинами квадрата (задача 6.7). Также в этой конструкции равны площади треугольников ABC и KBF, а площадь общей части квадратов $ABKP$ и $OIRJ$ равна четверти площади квадрата $ABKP$.

3 (ч). Для каждой точки B полуокружности с диаметром AC (точка B отлична от точек A и C) на сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне треугольника квадраты. Найдите множество середин M отрезков, соединяющих центры этих квадратов.

Эксперимент. Построим окружность с центром I и горизонтальным диаметром[1] AC, отметим на верхней полуокружности точку B, построим на отрезках AB и BC квадраты с центрами O и R. Проведём отрезок OR, отметим его середину M, попросим оставлять след. Когда точка B пробегает полуокружность, точка M также зарисовывает *полуокружность с диаметром* UI, где U — середина данной в условии полуокружности. Для подкрепления этой гипотезы построим окружность с диаметром UI — она пройдёт



[1]В «Геогебре» можно построить полуокружность по двум концам диаметра, а также можно использовать предыдущий чертёж, привязав точку B к этой полуокружности.

по следу. Заметим, что отрезок OR пересекает полуокружность AC в той же точке U при любом положении точки B.

Решение. Если точка B лежит на дуге AU, то $\angle CBR = 45^\circ$. Но и $\angle CBU = 45^\circ$ как вписанный, опирающийся на дугу 90°. Поэтому луч BR пересекает полуокружность в точке U. Аналогичное верно и для случая, когда B лежит на дуге UC.

Четырёхугольник $AORC$ является трапецией (AO и RC перпендикулярны OR). Его средняя линия IM также перпендикулярна OR. В равнобедренном треугольнике IBU отрезок IM является высотой, а значит, и медианой. Поэтому $\overrightarrow{UM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{UB}$, т. е. множество точек M получается гомотетией полуокружности AB с центром U и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Замечание. Другое решение получается, если использовать задачу 2. Поскольку отрезки OI и IR равны и перпендикулярны, медиана IM треугольника OIR является и его высотой. Поскольку отрезок IU фиксирован, а угол IMU прямой, искомое множество точек — это дуга окружности, построенной на диаметре IU.

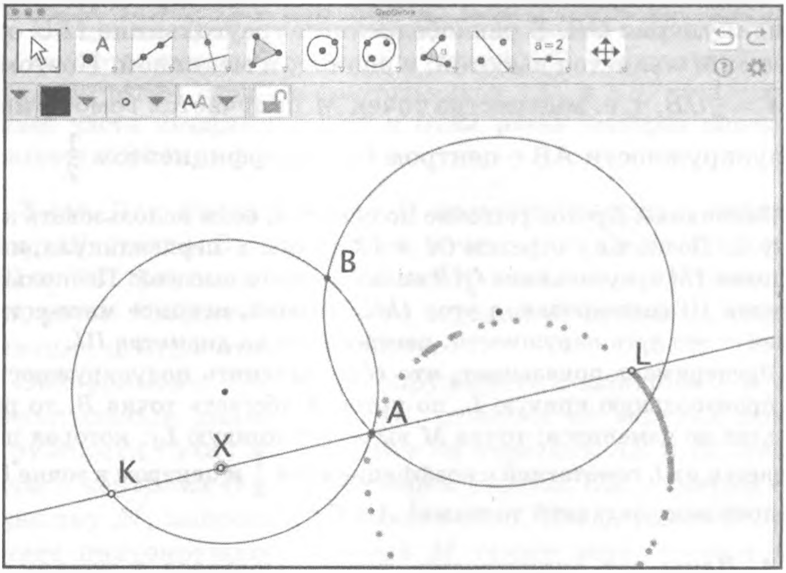
Эксперимент показывает, что если заменить полуокружность на произвольную кривую L, по которой «бегает» точка B, то результат не изменится: точка M вычертит кривую L_1, которая получается из L гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке U, по-прежнему заданной точками[1] A и C.

4. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями. Постройте такую прямую p_1, не совпадающую с AB, чтобы выполнялось равенство $AK = AL$.

Эксперимент. Построим две окружности, назовём точки их пересечения A и B. Проведём окружность маленького радиуса с центром A, отметим на ней точку X, скроем окружность. Построим прямую $AX = p$.

[1] Предполагается, что в квадратах $ABXY$ и $BCZW$ вершины перечислены в порядке против часовой стрелки и этот порядок сохраняется, даже если квадраты пересекают треугольник ABC и друг друга.

Применим метод освобождения точки (глава 3): временно откажемся от требования, чтобы точка L лежала на окружности. Отметим на прямой p точку K пересечения с одной из окружностей[1]. Отложим на прямой p отрезок AL, равный KA. Попросим точку L оставлять след. Двигая точку X, сделаем оборот прямой p вокруг точки A. Точка L зарисует окружность, пересечение этой окружности со второй даёт искомую точку L_1.



Решение. Теперь понятно, как осуществить «бумажное» решение: отобразим первую окружность симметрично относительно точки A, её образ пересекает вторую окружность в точках A и L_1. Точке L_1 соответствует искомая прямая $AL_1 = p_1$.

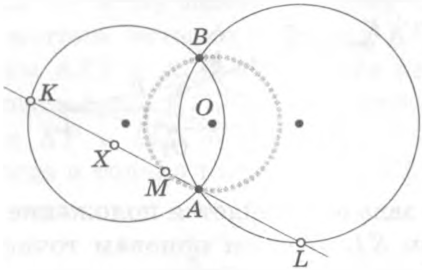
[1]В «Матконструкторе» версии 6 и в «Живой математике» при прямом построении второй точки K пересечения прямой AX и окружности возникает проблема: при встрече подвижная и неподвижная точки «меняются местами». Её можно решить так: строим диаметр окружности, перпендикулярный к AX, и точку K, симметричную точке A относительно этого диаметра. (В «Матконструкторе» версии 6 можно также воспользоваться специальным макросом: Макросы → Построения с окружностью → Вторая точка пересечения прямой и окружности.)

5. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями. Найдите множество середин отрезков KL при всех возможных p.

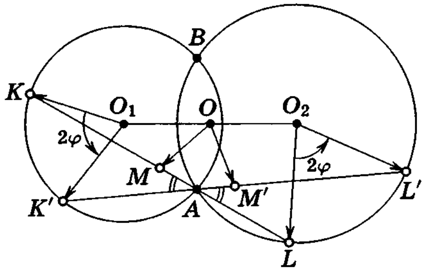
(Подсказка. Проведите радиусы окружностей в точки K и L соответственно.)

Эксперимент. Построим две окружности, назовём точки их пересечения A и B. Проведём окружность маленького радиуса с центром A, отметим на ней точку X, скроем окружность. Построим прямую $AX = p$, отметим K и L — точки пересечения этой прямой с окружностями.

Построим отрезок KL и его середину M, попросим её оставлять след (или даже живой след). Двигая точку X, сделаем оборот прямой p вокруг точки A. Траекторией середины отрезка KL будет *окружность, проходящая через точки A и B, с центром в середине отрезка, соединяющего центры данных окружностей.* Эту гипотезу подкрепим, построив указанную середину O и проведя окружность с центром в точке O через точку A, — она совпадёт с траекторией.



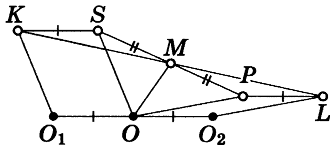
Решение. Обозначим центры данных окружностей O_1 и O_2. Пусть отрезок KL повернулся относительно точки A на угол φ против часовой стрелки, заняв положение $K'L'$. Тогда по теореме о вписанном угле центральные углы KO_1K' и LO_2L' оба равны 2φ, т. е. точки K' и L' получаются поворотом на 2φ против часовой стрелки относительно O_1 и O_2. Это означает, что угол между радиусами O_1K и



O_2L при вращении KL не меняется (так называемая *лемма о велосипедистах*).

Пусть O — середина отрезка O_1O_2, M — середина отрезка KL. Заметим, что $\overrightarrow{O_1K}+\overrightarrow{O_2L}=2\overrightarrow{OM}$. Поскольку длины векторов $\overrightarrow{O_1K}$ и $\overrightarrow{O_2L}$ постоянны и угол между ними не меняется, длина вектора $\overrightarrow{OM}$ также постоянна и он вращается вокруг точки O с той же угловой скоростью, что и векторы $\overrightarrow{O_1K}$ и $\overrightarrow{O_2L}$. Значит, его конец M заметает окружность.

Предыдущий абзац можно изложить и без применения векторов. Рассмотрим параллелограммы OO_1KS и OO_2LP. Тогда OM — медиана треугольника OSP. При вращении отрезка KL треугольник OSP вращается вокруг точки O, оставаясь равным себе. Значит, конец его медианы OM заметает окружность.



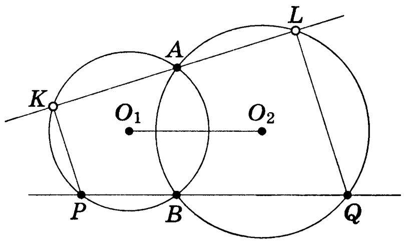
Наконец, по задаче 4 найдётся положение прямой p, при котором отрезок KL делится пополам точкой A, т. е. точка M совпадает с точкой A. Отсюда следует, что $OM = OA$.

Замечание. Интересно также изучить траекторию точки, делящей отрезок KL в произвольном фиксированном отношении.

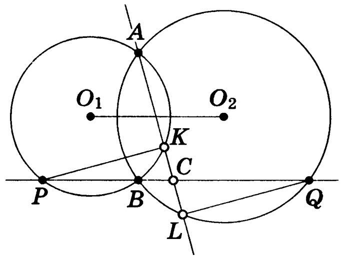
6. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями. Постройте такую прямую p_2, чтобы длина отрезка KL была максимальна.

Эксперимент. Построение аналогично предыдущей задаче. Выведем на экран длину отрезка KL и будем вращать прямую $p = AX$ вокруг точки A. *Отрезок KL максимален, когда он параллелен линии центров O_1O_2.* Гипотезу подкрепим, построив прямую p_2, проходящую через точку A параллельно O_1O_2. Максимум длины KL достигается, когда прямая p совпадает с p_2.

Решение. Проведём через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках K и L, а через точку B — прямую, параллельную линии центров O_1O_2 и пересекающую окружности вторично в точках P и Q. Поскольку углы ABP и ABQ прямые, точки A, O_1, P лежат на одной прямой, так же как и A, O_2, Q.



Пусть точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой KL. Рассмотрим четырёхугольник $KPQL$. Поскольку вписанные углы AKP и ALQ опираются на диаметры, они прямые, следовательно, $KPQL$ — прямоугольная трапеция с основаниями KP и LQ. Значит, $KL \leqslant PQ$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда $KL \parallel PQ$.



Пусть теперь точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой KL. Четырёхугольник $KPQL$ превращается в замкнутую ломаную, самопересекающуюся в некоторой точке C, при этом углы AKP и ALQ по-прежнему прямые. Рассмотрев прямоугольные треугольники PKC и CLQ, запишем: $KC < PC$, $CL < CQ$ (катет меньше гипотенузы). Заметим, что $KL \leqslant KC + CL$ при любом расположении точек K, L, C. Складывая неравенства, получаем $KL \leqslant KC + CL < < PC + CQ = PQ$. Таким образом, в этом случае максимум не достигается.

Замечание. Другое доказательство получится, если воспользоваться конструкцией из последнего абзаца задачи 5. Нам надо максимизировать отрезок KL, при этом в ломаной $KSPL$ длины всех звеньев постоянны. Значит, наибольшее расстояние между концами ломаной K и L достигается, когда точки K, S, P, L лежат на одной прямой, т. е. когда $KL \parallel O_1O_2$. Обычно в задачах на минимум всё наоборот — фиксированы концы ломаной, а длины звеньев могут изменяться (ср. задачи 7.1, 7.4, Д60).

См. также дополнительные задачи Д63—Д65.

* * *

Пример расположения материалов на постере:

<table>
<tr><td>Авторы</td><td colspan="3">Название</td></tr>
<tr><td colspan="2">Постановка задачи</td><td colspan="2">Чертёж</td></tr>
<tr><td colspan="3">Результат (ответ, алгоритм построения...)</td><td>Решение (доказательство результата), формулы, чертежи</td></tr>
</table>

Дополнительные задачи

К занятию 1

Д1. Впишите параллелограмм $AECF$ в фиксированный прямоугольник $ABCD$ так, чтобы точка E лежала на стороне BC, а точка F — на стороне AD.

Д2. Постройте квадрат с фиксированным центром и вершиной на фиксированной прямой.

Д3. Постройте квадрат, диагональ которого лежит на фиксированной прямой.

Д4. Постройте ромб $ABCD$, у которого вершина A фиксирована, а вершины B и D лежат на фиксированных лучах AP и AQ.

Д5. В фиксированном равнобедренном треугольнике ADE с основанием DE отметьте на стороне AD точку F, а на стороне AE — точку G так, чтобы выполнялось условие $AF = EG$. Постройте отрезок FG.

Д6. Зафиксирован угол, меньший $60°$. Постройте правильный треугольник, у которого две вершины лежат на одной стороне угла, а третья вершина — на другой. Сколько таких треугольников возможно?

Д7. Постройте прямоугольный треугольник, у которого катеты лежат на сторонах фиксированного прямого угла, а гипотенуза имеет фиксированную длину.

Д8. Дан угол. Постройте окружность, касающуюся сторон угла.

Д9. Дан прямой угол. Постройте прямоугольный треугольник с фиксированными сторонами так, чтобы вершины его острых углов двигались по двум сторонам данного прямого угла.

К занятию 3

Д10. Даны прямая k и две окружности ω_1 и ω_2 по разные стороны от неё. Постройте квадрат, диагональ которого лежит на данной прямой k, а концы другой диагонали — на данных окружностях.

Д11. Даны треугольник и отрезок AB (он короче самой короткой высоты треугольника). Соедините две стороны треугольника отрезком, равным и параллельным AB.

Д12. Дан треугольник ABC. Постройте параллелограмм $APQR$ так, чтобы точка P лежала на отрезке AB, точка Q — на отрезке BC, а точка R — на отрезке CA и при этом выполнялось соотношение $AR : AP = 2 : 1$.

Д13. а) Даны две окружности и точка B. Постройте отрезок AC с концами на данных окружностях так, чтобы точка B была его серединой. Как должна быть расположена точка B относительно окружностей, чтобы задача имела решение?

б) Та же задача, но $AB : BC = 1 : 2$.

в) Даны две концентрические окружности. Проведите хорду большей окружности так, чтобы меньшая окружность разбивала её на три равных отрезка.

Д14. Дан треугольник ABC и точка O внутри него. Постройте отрезок с серединой в точке O, концы которого лежат на границе треугольника ABC. Какое максимальное количество решений может иметь эта задача?

Д15. Даны точка A, прямые k и m. а) Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершина B лежала на прямой k, а вершина C — на прямой m. б) Постройте треугольник ABD, для которого $\angle BAD = 60°$, $BA : AD = 2 : 1$, вершина B лежит на прямой k, а вершина D — на прямой m.

Д16. Даны угол, прямая и точка. Постройте окружность с центром в заданной точке и её хорду с концами на сторонах заданного угла так, чтобы хорда была параллельна заданной прямой.

Д17. Дан треугольник ABC. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, чтобы выполнялись условия $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.

Д18. В данный параллелограмм впишите квадрат так, чтобы вершины квадрата лежали на четырёх разных сторонах параллелограмма.

Д19. Даны параллелограммы $ABCD$ и $PQRS$. Впишите в первый из них параллелограмм, подобный второму. (Вершины вписанного параллелограмма должны лежать на четырёх разных сторонах описанного параллелограмма.)

Д20. Даны окружность ω с отмеченной точкой A и не имеющая с ней общих точек прямая k, на которой отмечена точка B. Постройте окружность, которая касается а) прямой и окружности в точке A, б*) прямой в точке B и окружности.

Д21. Основания двух а) равнобедренных, б*) неравнобедренных остроугольных треугольников лежат на прямой k, а вершины — по одну сторону от k. Постройте прямую, параллельную прямой k, от которой треугольники отсекают равные отрезки.

Д22*. Даны два непересекающихся круга и прямая k. Постройте прямую, параллельную прямой k, от которой окружности отсекают равные отрезки.

Д23*. Даны два непересекающихся круга и точка O. Постройте прямую, проходящую через точку O, от которой окружности отсекают равные отрезки.

К занятию 4

Д24. Даны отрезок AB и пересекающая его прямая l. Отметьте на прямой все точки C, для которых треугольник ABC равнобедренный.

Д25. Дан треугольник ABC. а) Проведите через вершину A треугольника прямую, которая поделит его на две части равной площади. б) Найдите множество таких точек X, что площадь треугольника BAX равна площади треугольника CAX.

Д26. Даны прямоугольник и точка A. Проведите через точку A прямую, которая поделит прямоугольник на две части равной площади.

Д27. Дан треугольник. Найдите в его плоскости такую точку, чтобы сумма расстояний от неё до вершин и до середин сторон треугольника (всего шесть отрезков) была наименьшей.

Д28. Даны угол и точка A внутри него. Проведите через точку A прямую, которая отсечёт от угла треугольник наименьшей площади.

Д29. Дана трапеция $ABCD$ (основания AD и BC, $AD>BC$). Прямая k, параллельная основаниям, отсекает от угла BAC треугольник PAQ площади S_1, а от угла ACD треугольник QCR площади S_2. Найдите такое положение прямой k, чтобы сумма $S_1 + S_2$ была наименьшей.

Д30. (Задача Евклида.) Впишите в данный треугольник параллелограмм наибольшей площади так, что одна его вершина совпадает с вершиной исходного треугольника, а другие три лежат на его сторонах.

Д31. Дан треугольник ABC. Через вершину A проведите прямую p так, чтобы сумма расстояний от неё до вершин B и C была а) наименьшей, б) наибольшей.

Д32. Даны острый угол и произвольная замкнутая кривая L внутри него (не имеющая общих точек со сторонами угла). Укажите точку кривой L, сумма расстояний от которой до прямых, содержащих стороны угла, а) минимальна, б) максимальна.

К занятиям 2 и 5

Д33. Даны окружность с центром O и точка C а) вне её, б) внутри её. Рассматривают все отрезки CD, второй конец которых D лежит на окружности. Найдите множество середин таких отрезков.

Д34. Даны точка C и произвольная кривая k. Рассматриваются все отрезки CD, у которых середина E лежит на кривой k. Найдите множество точек D.

Д35. В треугольнике ABC положение вершин B и C зафиксировано, а вершина A перемещается в плоскости треугольника так, что медиана CM имеет одну и ту же длину. По какой траектории движется точка A?

Д36. Заданы окружность и две точки A и B на ней. Пусть M — произвольная точка этой же окружности. На продолжении отрезка BM от точки M откладывается отрезок MN, равный по длине отрезку AM. Найдите множество точек N.

Д37. На окружности заданы точки A и B и рассматриваются все диаметры CD. Найдите множество точек пересечения *прямых* (не отрезков!) BC и AD.

Д38. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB = CD$). Точки Q и P одновременно начинают движение с равными скоростями: Q по отрезку AB из вершины A, а P — по отрезку CD из вершины C. Найдите траекторию середины отрезка PQ.

Д39. Дана окружность, на ней зафиксированы точки A и B и «бегает» точка C. Найдите траекторию точки пересечения а) высот, б) биссектрис, в) медиан треугольника ABC.

Д40. Даны отрезок AB и параллельная ему прямая k, по которой «бегает» точка C. Найдите траекторию точки пересечения а) серединных перпендикуляров, б) медиан, в) высот, г*) биссектрис треугольника ABC.

Д41. На координатной плоскости рассмотрим все параболы вида $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трёх точках. Для каждой параболы через три указанные точки проводят окружность. Найдите общее свойство множества всех таких окружностей.

Д42. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили точки P и Q соответственно. Вершина B движется по плоскости так, что отношения $AP : PB$ и $BQ : QC$ остаются неизменными[1]. Найдите общее свойство множества всех прямых PQ.

Д43. В треугольнике ABC отметили на стороне AB точку D. Для произвольной точки F на отрезке CD провели лучи AF и BF, которые пересекают стороны BC и AC в точках E и G соответственно. Постройте множество прямых GE для всех возможных F и найдите их общее свойство.

Д44. (Зона безопасности.) Пусть орудие, стоящее в начале координат, выпускает снаряд с начальной скоростью v под углом α к горизонту. Тогда координаты снаряда в момент времени t будут $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$, а значит,

---

[1]Этого легко добиться, поскольку в «Живой математике», «Математическом конструкторе» и «Геогебре» точка-потомок привязана к подвижному отрезку-предку таким образом, что делит его в постоянном отношении.

$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}$. Сделав замену $k = \mathrm{tg}\,\alpha \in (\infty; +\infty)$, $a = 2v^2 = \mathrm{const}$, получим $y = kx - a(1 + k^2)x^2$. В баллистике важной задачей является найти область, через которую не пройдёт ни одна из этих парабол (*зона безопасности*). Постройте и опишите множество парабол вида $y = kx - a(1 + k^2)x^2$ при $k \in (\infty; +\infty)$.

К занятию 6

Д45. а) По отрезку AC движется точка B. Отмечены точка P — середина AB и точка Q — середина BC. Найдите величину, которая остаётся неизменной. б) Внутри угла AOC поворачивается луч OB. Проведены OP — биссектриса угла AOB и OQ — биссектриса угла BOC. Найдите величину, которая остаётся неизменной.

Д46. Вершина угла B «бегает» по окружности, а стороны пересекают окружность в фиксированных точках A и C. а) Найдите постоянный угол. б) Найдите фиксированную точку на биссектрисе угла B.

Д47. Рассмотрим два четырёхугольника $ABCD$ и $A'BC'D$, где отрезки AC и $A'C'$ равны и параллельны. Найдите величину, которая одинакова для обоих четырёхугольников. (Четырёхугольники могут быть и невыпуклыми!)

Д48. В плоскости равностороннего треугольника ABC с высотой h отмечена точка M. Расстояния от M до прямых AB и AC равны c и b. Найдите расстояние от M до прямой BC.

Д49. Через точку O проведены три прямые под углами $60°$. Из точки P, лежащей вне прямых, опущены перпендикуляры PA, PB, PC на прямые. Опишите взаимное расположение точек P, O, A, B, C.

Д50. Дан равносторонний треугольник ABC. На его стороне AC в другой полуплоскости от точки B построен ромб $ACLK$. Как меняется угол KBL при движении стороны KL?

Д51. На координатной плоскости xOy построена гипербола $y = \dfrac{1}{x}$. На положительной ветви гиперболы отмечают точку A и проводят через неё касательную к гиперболе. Рассматривают отрезки OB и OC, которые касательная отсекает от осей координат.

а) Опишите взаимное положение точек A, B, C.

б) Какая величина неизменна при движении точки A по ветви гиперболы?

Д52. Два квадрата (необязательно равные) пересекаются в восьми точках. Найдите пару равных и взаимно перпендикулярных отрезков с концами в этих точках.

Д53. На сторонах произвольного выпуклого четырёхугольника наружу построили четыре квадрата. Найдите свойства двух отрезков, соединяющих центры противоположных квадратов.

К занятию 7

Д54. Среди всех треугольников с данными длинами сторон AB и AC ($AB < AC$) найдите тот, у которого радиус описанной окружности минимален.

Д55. Даны отрезок AB и а) пересекающая, б) не пересекающая его прямая k. Отметьте на прямой точку C так, чтобы радиус описанной окружности треугольника ABC был наименьшим.

Д56. Даны прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. Постройте на прямой m такую точку M, чтобы сумма $AM^2 + MB^2$ была наименьшей.

Д57. Даны прямая l и точки A и B, лежащие по разные стороны от неё. Постройте окружность, проходящую через точки A и B, так, чтобы прямая l высекала на ней хорду наименьшей длины.

Д58. Среди всех четырёхугольников с заданными длинами сторон, идущими в данном порядке, найдите четырёхугольник наибольшей площади.

Д59. а) Найдите в плоскости треугольника точку, для которой сумма квадратов расстояний до вершин наименьшая.

б) Та же задача, если точка лежит на данной прямой.

Д60. Найдите внутри остроугольного треугольника точку, для которой сумма расстояний до вершин наименьшая.

Д61. Найдите в треугольнике а) точку X, для которой произведение расстояний до прямых, содержащих стороны, наибольшее, б) такую точку Y, что если её соединить отрезками со всеми вершинами, то площади полученных треугольников равны.

Д62. (Американская математическая олимпиада, 1979 г.) Через данную точку M, лежащую внутри острого угла O, проведите отрезок AB с концами на сторонах угла так, чтобы величина $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM}$ была наибольшей.

К главе 8

Д63. На сторонах треугольника ABC наружу построены квадраты $ABKP$ и $BCGF$.

а) При каких условиях $KF \parallel AC$?

б) Проведены прямые, содержащие биссектрису, медиану и высоту треугольника KBF, исходящие из вершины B. Как эти прямые соотносятся с треугольником ABC?

в) Отмечены точка O — центр квадрата $ABKP$ и точка R — центр квадрата $BCGF$. Дополнительно известно, что угол ABC прямой. Опишите взаимное расположение биссектрисы BD треугольника ABC и отрезков AR и CO.

г) На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABKP$, $BCGF$ и $CAMN$. При какой величине угла ABC шестиугольник $KPMNGF$ имеет наибольшую площадь, если зафиксированы длины сторон $BC = a$ и $AB = c$?

Д64. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями[1].

а) Постройте такую прямую p_3, чтобы длина отрезка KL была минимальна.

б) Пусть K' — середина отрезка AK, L' — середина отрезка AL. Постройте множество серединных перпендикуляров ко всем отрезкам $K'L'$, найдите их общее свойство.

в) Существует ли точка, от которой равноудалены точки K и L независимо от выбора прямой p?

---

[1]При составлении этой задачи использована статья: *В. Ю. Протасов.* О двух велосипедистах и вишнёвой косточке // Квант. 2008. № 3. С. 41—44 (http://geometry.ru/articles/protasovbycicle.pdf).

г) (О двух велосипедистах, XXI Международная математическая олимпиада, Лондон, 1979 год.) Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый — по своей) с постоянными скоростями и в одном направлении (либо оба по часовой стрелке, либо оба против). Они одновременно выезжают из точки A, делают один оборот и одновременно возвращаются в A. Докажите, что тогда найдётся неподвижная точка, которая всё время равноудалена от велосипедистов.

Д65. Даны окружность с центром O и точка P внутри неё. Через точку P проведены две взаимно перпендикулярные хорды окружности — AC и BD. Построен отрезок KL, соединяющий середины сторон AB и CD соответственно.

а) Опишите взаимное расположение отрезков KL и PO при вращении хорды AC вокруг P.

б) Через точку K провели окружность с центром G (точка пересечения отрезков KL и PO). Через какие ещё точки четырёхугольника $ABCD$ она проходит?

Ответы, решения, указания к дополнительным задачам

Д1. Построение. Построим прямоугольник $ABCD$, отметим точку E на отрезке BC, проведём прямую AE. Через точку C проведём прямую, параллельную AE. Точку её пересечения с AD назовём F. Отметим $AECF$ как многоугольник и скроем две прямые.

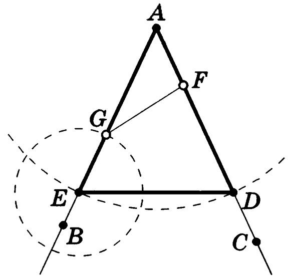
Д2. Указание. Соедините произвольную точку A прямой с центром O. Постройте окружность с центром O и радиусом OA. Проведите из точки O перпендикулярную прямую к OA. Окружность пересекает две перпендикулярные прямые в вершинах искомого квадрата $ABCD$.

Д3. Указание. Постройте на данной прямой произвольный отрезок AC, проведите к нему серединный перпендикуляр, проведите окружность с центром в середине AC, проходящую через точку A. Окружность пересекает две прямые в вершинах искомого квадрата $ABCD$.

Д4. Построение 1. Проведём лучи AP и AQ. Построим окружность с центром A, проходящую через произвольную точку B на луче AP, и пусть D — точка её пересечения с лучом AQ. Через точку B проведём прямую, параллельную AQ, через D — прямую, параллельную AP, отметим точку C на пересечении этих прямых. Отметим четырёхугольник $ABCD$.

Построение 2 (используется инструмент «биссектриса»). Построим биссектрису угла PAQ, отметим на ней произвольную точку C и проведём через неё две прямые, параллельные сторонам угла.

Д5. Построение. Чтобы построить равнобедренный треугольник ADE, построим два луча AB и AC с общей вершиной и проведём окружность произвольного радиуса с центром A. На пересечении окружности с лучами отметим точки D и E и построим треугольник ADE. Построим произвольную точку F на отрезке AD. Чтобы построить $EG = AF$, проведём окружность с центром E и радиусом AF (для этого можно провести отрезок AF). На пересечении окружности с отрезком AE отметим точку G, соединим точки G и F. Скроем окружности.



Проверка. При движении точки F по отрезку AD точка G также перемещается. От точки G чертёж не зависит.

Д6. Указание. Сначала постройте высоту треугольника.

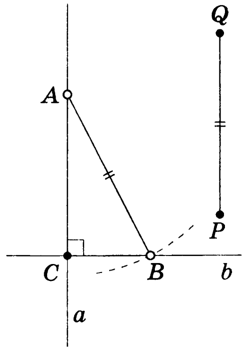
Построение. Отметим на одной стороне угла произвольную точку A, опустим из неё перпендикуляр AH на вторую сторону угла. Построим два луча с вершиной A, составляющие с лучом AH углы 30°. Точки их пересечения со второй стороной угла назовём B и C. Отметим треугольник ABC, он и будет искомым.

Проверка. При движении точки A по лучу размеры треугольника меняются, но он остаётся равносторонним.

Д7. Построение. Построим пару взаимно перпендикулярных прямых a и b, назовём точку их пересечения C. Отметим на прямой a произвольную точку A. На прямой b надо выбрать точку B на фиксированном расстоянии от точки A. Для этого построим отрезок PQ и проведём окружность с центром A и радиусом, равным PQ. На пересечении окружности с прямой b отметим точку B. Отметим ABC как многоугольник и скроем окружность.

Если оказалось, что окружность и прямая b не пересекаются, надо уменьшить отрезок AC.

Проверка. При движении точки A по прямой a длины катетов меняются, но угол остаётся прямым и гипотенуза фиксированной.



Д8. Указание. Сначала постройте биссектрису угла.

Построение. Проводим биссектрису угла, выбираем на ней любую точку O, опускаем перпендикуляр OH на одну из сторон угла. Проводим окружность с центром O, проходящую через точку H.

Проверка. При движении точки O получим семейство окружностей, касающихся сторон угла.

Д9. Указание. Сначала постройте треугольник-шаблон.

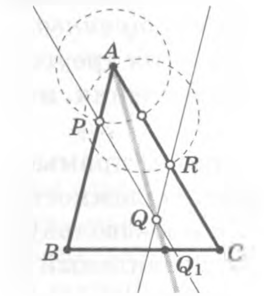
Построение. Построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, который будет шаблоном для нашего подвижного, но жёсткого треугольника. Построим две взаимно перпендикулярные прямые, отметим на одной из них точку D. Построим окружность с центром D и радиусом AB, на её пересечении с другой стороной угла отметим точку E. Теперь из точек D и E проведём окружности радиусами AC и BC, одну из точек их пересечения назовём F. Построим треугольник с вершинами D, E, F, он и будет искомым. Вспомогательные окружности можно скрыть.

Д10. Решение. Отметим точку A на окружности ω_1, проведём прямую s, проходящую через точку A и перпендикулярную прямой k. На пересечении прямых k и s отметим точку Q. Проведём окружность с центром Q и радиусом QA. На её пересечениях с прямыми k и s отметим точки B, C, D, получим четырёхугольник $ABCD$ (квадрат). Двигая точку A по окружности ω_1, построим траекторию точки C. Решения соответствуют пересечениям траектории с ω_2. Может быть от 0 до 2 решений. *Осевая*[1] *симметрия одной из окружностей относительно* k.

Д11. Указание. Построение аналогично задаче 3.3. *Параллельный перенос треугольника на вектор* $\overrightarrow{AB}$.

Д12. Решение. Временно откажемся от принадлежности точки Q отрезку BC. Построим указанный треугольник ABC, отметим на стороне AB произвольную точку P. Отложим на луче AC отрезок $AR = 2AP$ (например, дважды построив окружность с радиусом AP). Поскольку у параллелограмма противоположные стороны параллельны, проведём через точки P и R прямые, параллельные AC и AB соответственно, и на пересечении отметим точку Q. Получим параллелограмм $APQR$. Двигая точку P, добьёмся того, чтобы точка Q попала на сторону BC (прикидка).

Попросим точку Q оставлять след и будем двигать точку P по отрезку AB. Получим луч, исходящий из вершины угла A. Вершина искомого параллелограмма находится на пересечении этого луча с отрезком BC (эскиз).



Чтобы построить компьютерное решение, можно отметить два положения точки Q и провести через них прямую (или построить прямую AQ). На пересечении этой прямой с отрезком BC отметим точку Q_1 и восстановим параллелограмм.

Гомотетия параллелограмма $APQR$ *относительно точки* A.

---

[1]Курсивом в тексте решения задач Д10—Д19 выделено геометрическое преобразование, которое осуществляется в задаче.

Замечание. Гораздо легче случай $AR : AP = 1 : 1$. В этом случае параллелограмм $APQR$ является ромбом. Заметим, что у ромба диагональ является биссектрисой. Следовательно, AQ — биссектриса треугольника ABC. Это соображение даёт и компьютерное решение, и доказательство.

Д13. Указание. а) Построение аналогично задаче 3.1. *Симметрия одной из окружностей относительно точки B.* Чтобы задача имела решение, точка B должна попасть в множество середин всех отрезков с концами на данных окружностях (см. задачу 5.5).

б) Построение аналогично задаче 3.4. *Гомотетия окружности с центром B и коэффициентом* -2.

в) Пусть хорда AD большей окружности пересекает меньшую в точках B и C. Заметим, что $AB = CD$. Поэтому для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $AB = BC$. Далее используем пункт а), выбрав в качестве B произвольную точку меньшей окружности.

Д14. Указание. Построение аналогично задаче 3.1. Получим *треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O.* У этих треугольников может быть не больше шести точек пересечения, им соответствуют не больше трёх решений.

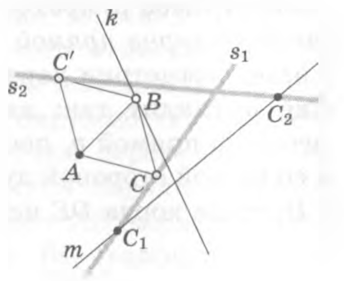
Д15. Решение. Построим прямые k и m и точку A. Временно откажемся от принадлежности вершины C прямой m. Выберем на прямой k произвольную точку B и построим отрезок AB. Построим правильный треугольник ABC на отрезке AB как на стороне.

а) Выберем такое положение точки B, чтобы точка C попала на прямую m (прикидка).

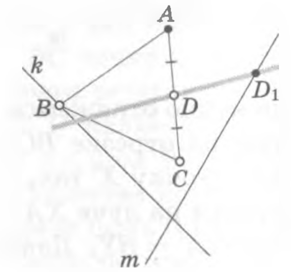
Попросим точку C оставлять след. Когда точка B пробегает прямую k, точка C также вырисовывает прямую s. Пересечение прямой s с прямой m соответствует решению задачи (эскиз).

Получить компьютерное решение можно, построив два положения точки C и проведя через них прямую s.

Поскольку можно построить два правильных треугольника ABC и ABC' по разные стороны от AB, получим две прямые s_1 и s_2, две точки пересечения с m (C_1 и C_2) и два решения задачи.



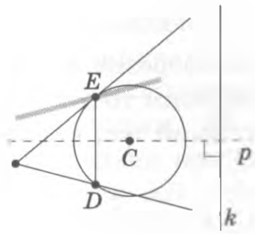
б) Построим середину отрезка AC, назовём её D, отметим треугольник ABD. Попросим точку D оставлять след. Дальнейший ход решения такой же, как в пункте а). Решений также два.



а) *Поворот прямой k на угол 60° относительно точки A (либо по часовой стрелке, либо против).* б) *Поворот прямой k на угол 60° относительно точки A (либо по часовой стрелке, либо против) и последующая гомотетия относительно точки A с коэффициентом $\frac{1}{2}$.* Ср. задачу 3.8 б).

Д16. Решение. Построим угол и прямую k, отметим точку C, а на стороне угла — точку D. Построим окружность с центром C, проходящую через точку D. Проведём через точку D прямую, параллельную k, и пусть она вторично пересекает окружность в точке E. Двигая точку D по стороне угла, построим траекторию точки E. Точке пересечения траектории со второй стороной угла соответствует решение задачи.

Чтобы понять связь траекторий точек D и E, можно отвязать точку D от луча, попросить её также оставлять след и начертить ею произвольную кривую. Тогда легко увидеть, что *траектория точки E симметрична траектории точки D относительно прямой p, проходящей через центр окружности C перпендикулярно прямой k*. Действительно, прямая p является осью симметрии хорды DE. Тем самым «бумажное» решение выглядит так: надо отразить одну сторону угла относительно прямой p, поставить точку E на пересечении образа со второй стороной луча и симметрично ей поставить точку D, тогда хорда DE искомая.



Д17. Решение 1. Временно откажемся от равенства отрезков AX и BY. Отметим на отрезке BC произвольную точку Y, а на отрезке BA — точку X так, чтобы выполнялось условие $XY \parallel AC$. Отложим на луче XA точку A' так, чтобы выполнялось равенство $XA' = BY$. Двигая точку Y, совместим точки A и A' (прикидка). Эскиз выполнить трудно. Заметим, что все ломаные $BYXA'$ гомотетичны друг другу с центром B. Осуществим *гомотетию ломаной $BYXA'$ с центром B и коэффициентом $\frac{BA}{BA'}$* и получим искомую ломаную.

Решение 2. Временно откажемся от параллельности отрезков AX и BY. Построим множество отрезков XY (см. задачу 5.4). Границей этого множества (огибающей семейства отрезков XY) будет парабола. Построим касательную к этой параболе и выберем такое её положение, чтобы она была параллельна AC. Отрезок XY лежит на этой касательной.

Д18. Решение. Построим параллелограмм $ABCD$, отметим его центр O (как середину диагонали). Заметим, что центр искомого квадрата совпадает с центром параллелограмма (см. решение следующей задачи). Получаем задачу: построить квадрат $PQRS$, центр которого O дан, а вершина P принадлежит отрезку AB (тогда в силу центральной симметрии вершина R будет принадлежать отрезку CD). Для этого отметим на отрезке AB точку P, построим прямую PO и перпендикулярную ей прямую через точку O, проведём окружность с центром O и радиусом OP. Оставшиеся три точки пересечении окружности с двумя прямыми в очевидном порядке назовём Q, R, S. Двигая вершину P по отрезку AB, добьёмся того, чтобы вершина Q попала на отрезок BC (одновременно в силу симметрии вершина S попадёт на отрезок DA). Это возможно не всегда.

Чтобы построить эскиз, нарисуем траекторию точки Q, возникающую при движении точки P, вершиной квадрата будет точка пересечения траектории с отрезком BC.

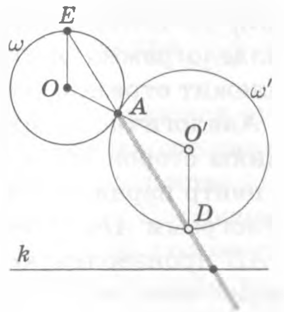
Траектория точки Q является прямой, её можно построить, соединив прямой p два положения точки Q. Отметим на пересечении p и BC точку Q_1, далее построим квадрат $P_1Q_1R_1S_1$ (компьютерное решение).

Траектория точки Q является прямой, получаемой *поворотом прямой AB на угол* 90° *относительно точки O.* В зависимости от количества пересечений прямой BC с образом прямой AB может быть 0 или 1 решение.

Д19. Решение. Сначала докажем, что если вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (точка A_1 лежит на стороне AB, точка B_1 — на стороне BC и т. д.), то центры параллелограммов совпадают. Центр параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ как середина отрезка B_1D_1 принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD. Аналогично он принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон BC и AD. Точка пересечения этих отрезков — центр параллелограмма $ABCD$.

Построим параллелограмм $ABCD$, отметим его центр O', отметим на отрезке AB произвольную точку P'. Построим прямую $P'O'$, на пересечении её с CD отметим точку R'. Построим прямую $O'T$ так, что угол $P'O'T$ равен углу между диагоналями параллелограмма $PQRS$ (возможен поворот в две стороны). На прямой $O'T$ отметим точку Q' так, что $O'Q' : OQ = O'P' : OP$, где O — центр параллелограмма $PQRS$, и точку S', симметричную Q' относительно O'. Будем двигать точку P' по отрезку AB, пока точка Q' не попадёт на отрезок BC (это возможно не всегда). *Поворотная гомотетия относительно центра O' параллелограмма $ABCD$ с углом, равным углу между диагоналями параллелограмма $PQRS$, и коэффициентом $\frac{QS}{PR}$.* Задача имеет от 0 до 2 решений.

Д20. Решение. а) Построим произвольную окружность ω', касающуюся данной окружности ω в точке A, проведём из центра ω' прямую p, перпендикулярную к данной прямой k, на пересечении прямой p с окружностью ω' отметим точку D. Будем менять радиус окружности ω' и следить за траекторией точки D. Искомая окружность касается прямой k в точке пересечения траектории с k (эскиз). Чтобы построить компьютерное решение, заметим, что траектория точки D — прямая, проходящая через точку A. Построив прямую AD, заметим, что она вторично пересекает окружность ω в точке E, самой удалённой от прямой k. Действительно, пусть O и O' — центры окружностей ω и ω'. Тогда треугольник OAE подобен треугольнику $O'AD$, поэтому точка D лежит на прямой EA. Тем самым «бумажное» решение выглядит так: построим прямую EA, на её пересечении с k отметим точку D, восстановим из неё перпендикуляр к k. Центр искомой окружности лежит на пересечении прямой OA и этого перпендикуляра.



б*) Построим произвольную окружность ω'', касающуюся данной прямой k в точке B. Соединим центры окружностей ω и ω'', отметим на пересечении линии центров с переменной окружностью ω'' точку C и будем следить за её траекторией при изменении радиуса окружности ω''. Искомая окружность касается окружности ω в точке пересечения траектории с ω (только компьютерное решение).

Д21. а) **Указание.** Параллельным переносом совместим треугольники по высоте, проведённой к основанию.

б*) **Решение.** Можно считать, что треугольники не пересекаются, иначе перенесём один из них параллельно k. Проведём прямую p, параллельную k, так, чтобы она пересекла оба треугольника. Обозначим точки пересечения в порядке следования на прямой A, B, C и D. От точки C на луче CD отложим отрезок CE, равный отрезку AB. Двигая прямую p параллельно себе, построим траекторию точки E. Пересечение этой траектории со стороной второго треугольника, содержащей точку D, определяет решение.

Заметим, что искомая прямая существует не всегда. Обозначим основания треугольников a_1 и a_2, а высоты, проведённые к ним, — h_1 и h_2 соответственно. Необходимое и достаточное условие существования решения: $a_1 \geqslant a_2$ и $h_1 \leqslant h_2$ либо $a_1 \leqslant a_2$ и $h_1 \geqslant h_2$. В самом деле, пусть мы провели прямую p на расстоянии x от прямой k. Обозначим длину отрезка AB через $f_1(x)$, а длину отрезка CD через $f_2(x)$. Построим графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в одной координатной плоскости. Если графики пересекаются, то у задачи есть решение, а если не пересекаются, то нет. Заметим, что $f_i(x)$ — линейные функции (как разности значений линейных функций, графики которых задают стороны треугольников) и их графиками служат отрезки с концами в точках $(0; a_i)$ и $(h_i; 0)$, $i = 1, 2$. Теперь критерий существования решения очевиден. С помощью этого подхода можно получить и аналитическое решение задачи.

Д22. Указание. Построение такое же, как в предыдущей задаче, но с заменой треугольников на окружности. Решение есть не всегда, поиск условий разрешимости и изучение траектории точки E представляет собой непростую задачу.

Д23. Указание. Проведём через точку O прямую p так, чтобы она пересекла обе окружности. Обозначим точки пересечения в порядке следования на прямой A, B, C и D.

От точки C на луче CD отложим отрезок CE, равный отрезку AB. Вращая прямую p вокруг точки O, построим траекторию точки E. Пересечение этой траектории с окружностью, содержащей точку D, определяет решение.

Д24. Эксперимент. Построим треугольник ABC, у которого сторона AB зафиксирована, а вершина C движется по фиксированной прямой l. Выведем на экран длины трёх его сторон и будем отмечать положения точки C, в которых две стороны будут равны. Насчитаем пять таких положений.

Решение. Если $AC = BC$, то вершина C лежит на пересечении l и серединного перпендикуляра к AB. Если $AB = BC$, то вершина C лежит на пересечении l и окружности с центром B и радиусом AB (две точки пересечения прямой и окружности дадут два треугольника). Аналогично рассматривается случай, когда $AB = AC$.

Замечание. Удобно с помощью компьютера обнаружить, что решений пять (условие пересечения отрезка AB и прямой l дано именно затем, чтобы все они реализовались), а затем найти их все аналитически.

Д25. Ответ. а) Прямая, содержащая медиану AM. б) Прямая, содержащая медиану AM, и прямая, параллельная основанию BC, проходящая через вершину A.

Указание. б) Приравняв площади двух треугольников BAX и CAX с общим основанием AX, докажите, что расстояния от точек B и C до прямой AX одинаковы. Далее используйте задачу 4.2.

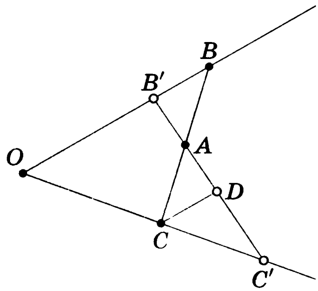
Д26. Ответ. Прямая, проходящая через центр прямоугольника.

Замечание. Теперь следующая задача решается в уме. Даны два прямоугольника. Проведите прямую, которая поделит площади обоих прямоугольников пополам.

Д27. Ответ. Точка пересечения медиан треугольника.

Указание. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть A_1 — середина BC. Докажите, что $AX + XA_1$ минимально тогда и только тогда, когда X принадлежит медиане AA_1.

Д28. Эксперимент. Построим угол с вершиной O, отметим внутри него точку A, проведём через A прямую, точки её пересечения со сторонами угла обозначим через B и C. Отметим треугольник OBC и будем следить за его площадью, вращая прямую BC вокруг точки A. Минимум площади достигается при таком положении прямой BC, что $AB = AC$. Эту гипотезу можно подкрепить, построив середину отрезка BC.



Решение. Проведём через точку A другую прямую, пересекающую стороны угла в точках B' и C'. Нам надо доказать, что $S_{OB'C'} - S_{OBC} > 0$. Заметим, что $S_{OB'C'} - S_{OBC} = S_{ACC'} - S_{ABB'}$. Проведём отрезок CD параллельно BB' (см. рисунок), тогда треугольники ACD и ABB' равны по стороне ($AB = AC$) и двум прилежащим углам. Но треугольник ACD лежит внутри треугольника ACC', поэтому $S_{ACC'} - S_{ABB'} = S_{DCC'} > 0$.

Построить искомую прямую BC можно с помощью задачи 3.1.

Д29. Ответ. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей.

Указание. Проведём диагональ BD, отметим точку пересечения диагоналей O и точку T пересечения k и BD. Заметим, что $PQ = TR$, а $PT = QR$. Поэтому $S_{QCR} = S_{PBT}$, а $S_1 + S_2 = S_{ABO} + S_{QOT} \geqslant S_{ABO}$. Равенство достигается при $S_{QOT} = 0$, т. е. когда прямая k проходит через точку O.

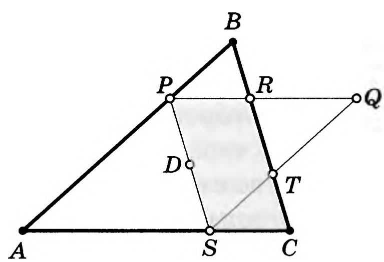
Д30. Эксперимент. На стороне AB треугольника ABC отметим точку P, проведём через неё прямые, параллельные AC и BC, на пересечении со сторонами отметим точки R и S ($PR \parallel AC$, $PS \parallel BC$). Построим четырёхугольник $CSPR$, выведем на экран его площадь. Будем двигать точку P по стороне AB и искать наибольшее значение площади. Оно достигается в случае, когда P *совпадает с серединой стороны* AB. Подкрепим гипотезу, построив точку M — середину AB и целенаправленно подводя к ней точку P.

Решение 1. Пусть площадь треугольника ABC равна 1. Тогда площадь «срединного» параллелограмма с диагональю CM равна $\frac{1}{2}$. Докажем, что площадь любого другого параллелограмма $CSPR$ меньше. Пусть $\frac{AP}{AB} = k$. Тогда $\frac{PB}{AB} = 1 - k$. Треугольник APS подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, и его площадь равна $1k^2 = k^2$. Аналогично площадь треугольника PBR равна $(1-k)^2$. Значит, площадь параллелограмма $CSPR$ равна

$$1 - k^2 - (1-k)^2 = 2k - 2k^2 = 2k(1-k) \leqslant \frac{1}{2},$$

причём равенство достигается при $k = \frac{1}{2}$.

Решение 2. Докажем, что площадь параллелограмма $CSPR$ меньше половины площади треугольника ABC всегда, кроме случая, когда P совпадает с M — серединой стороны AB. Пусть $PB < PA$. Отобразим треугольник SAP центрально-симметрично относительно точки D — середины стороны SP. Полученный треугольник SPQ выходит за пределы исходного и пересекает сторону BC в точках T и R. Заметим, что треугольник CST равен треугольнику RPB (например, по стороне и двум прилежащим углам), а треугольник SAP равен треугольнику SPQ. Площадь параллелограмма равна $S_{CST} + S_{STRP}$. А площадь оставшихся частей треугольника ABC равна $S_{RPB} + S_{SAP}$, что больше площади параллелограмма.



Д31. Указание. Задача обобщает задачу 4.7. Есть четыре кандидата в экстремальные прямые: прямые, на которых лежат стороны AB, AC и высота AQ, а также прямая, перпендикулярная медиане AT. Минимум и максимум достигаются для двух прямых из этих четырёх в зависимости от вида треугольника ABC.

Д32. Указание. Задача обобщает задачу 4.8. Постройте биссектрису угла и опустите на неё перпендикуляр из произвольной точки кривой L. Искомый минимум соответствует минимальному расстоянию от основания перпендикуляра до вершины угла.

Д33. Ответ. Окружность радиусом вдвое меньше исходной с центром в середине отрезка CO.

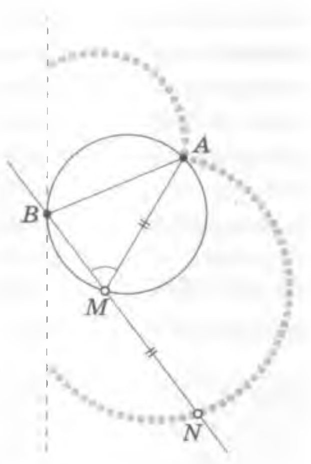
Д34. Ответ. Кривая, гомотетичная k относительно точки C с коэффициентом 2. Эту и предыдущую задачи можно использовать для пропедевтики или закрепления понятия гомотетии.

Д35. Эксперимент. Построим отрезок BC и окружность с центром C. Отметим на окружности точку M, проведём отрезок BM и удвоим его: $BM = MA$. Двигая точку M по окружности, нарисуем траекторию точки A. Это *окружность с центром в такой точке K, что C — середина отрезка KB.*

Решение. Из построения видно, что точка A получается из точки M при гомотетии с центром B и коэффициентом 2. Следовательно, траектория точки A получается с помощью этой же гомотетии из траектории точки M.

Д36. Эксперимент. Чтобы осуществить требуемое построение, проведём окружность с центром M радиуса MA и на пересечениях её с лучом BM поставим точку N. Попросим её оставлять след и будем двигать точку M по окружности. Точка N зарисует *дуги двух окружностей*, общая граница дуг — точка A, две другие границы дуг возникают при стремлении M к B с двух сторон.

Решение. Заметим, что, когда точка M скользит по одной из дуг AB, величина угла AMB фиксирована (по теореме о вписанном угле). Обозначим её α. Тогда на другой дуге величина угла также фиксирована и равна $180° - \alpha$. Про-

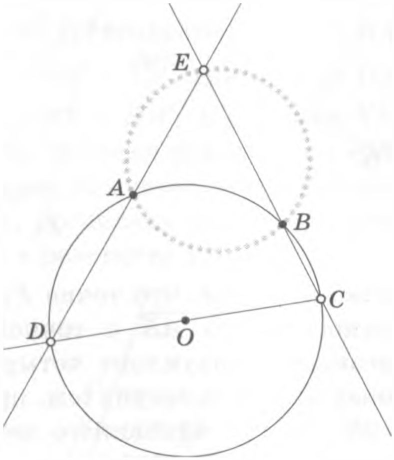


ведём отрезок AN. Так как треугольник ANM равнобедренный, по теореме о внешнем угле $\angle ANM = \frac{1}{2}AMB = \frac{\alpha}{2}$ либо $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ в зависимости от положения точки M. Заметим, что точки M и N находятся по одну сторону от прямой AB. Значит, все точки N по одну сторону от прямой AB лежат на дуге AB, вмещающей угол $\frac{\alpha}{2}$, а по другую — угол $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Точнее, нам годятся только части этих дуг от точки A до точки пересечения каждой дуги с касательной к окружности в точке B (это предельное положение секущей MB при её вращении вокруг B).

Замечание. Сходным образом можно доказать, что если откладывать отрезок MN на луче MB, то точка N зарисует дуги, дополняющие указанные дуги до двух окружностей.

Д37. Эксперимент. Построим окружность с центром O, отметим на ней три точки A, B и C. Проведём луч CO, на его пересечении с окружностью отметим точку D. Построим прямые BC и AD, точку их пересечения назовём E. Попросим точку E оставлять след и «обернём» точку C по окружности. Получим траекторию, похожую на *окружность, проходящую через точки A и B*. Какую именно окружность? Проведём прямые OA и OB и увидим, что это окружность, касающаяся сторон угла AOB в точках A и B.

Чтобы подкрепить нашу гипотезу, построим живой след точки E при движении точки C, а также указанную окружность (например, проведя прямые, перпендикулярные к OA и OB, через точки A и B соответственно). Окружность совпадёт с живым следом. Рассмотрим сразу серию случаев, двигая точки A и B по окружности: при любых вариациях траектория точки E будет совпадать с построенной окружностью.



Замечание. У этих окружностей касательные в общих точках взаимно перпендикулярны. Такие окружности называются *ортогональными* друг другу.

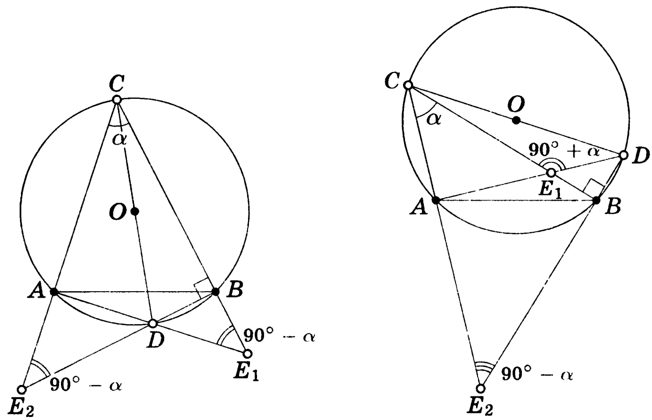
Указание[1]. Всего возможно два случая взаимного расположения хорды AB и диаметра CD: в первом случае они пересекаются, а во втором — нет.

Пусть $\angle ACB = \alpha$ и прямые AD и BC пересекаются в точке E_1. Если точки C и D поменять местами, то получим точку E_2. Они обе лежат на искомом множестве точек. Далее для определённости будем считать, что точка C всегда находится в одной полуплоскости относительно AB. Будем изучать множество точек E_1 и E_2.

Рассмотрим первый случай. Поскольку CD — диаметр, $\angle CBE_2 = 90°$ и $\angle AE_2B = 90° - \alpha = \angle AE_1B$. Заметим, что

[1]Это доказательство автор узнал от Д. В. Прокопенко.

точки E_1 и E_2 лежат в одной полуплоскости относительно AB и в разных с точкой C (см. левый рисунок).



Во втором случае получим, что точка E_1 лежит в одной полуплоскости относительно AB с точкой C как точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника, а точка E_2 — в разных полуплоскостях (см. правый рисунок). Имеем $\angle AE_2B = 90^\circ - \alpha$. Из вписанного четырёхугольника AE_1BE_2 получим, что $\angle AE_1B = 90^\circ + \alpha$.

Тем самым все точки принадлежат окружности, проходящей через точки A и B.

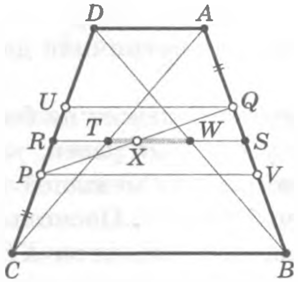
Докажем, что каждая точка указанной окружности подходит. Отметим на ней произвольную точку E, проведём прямые AE и BE, отметим точки C, D. Из счёта углов аналогично первой части доказательства легко вывести, что угол CBD прямой, а значит, CD — диаметр исходной окружности.

Из треугольника AOB получаем $\angle OAB = 90^\circ - \alpha = \angle AE_2B$. Поэтому OA — касательная к указанной окружности.

Д38. Эксперимент. Чтобы получить равнобедренную трапецию, можно построить угол и две окружности с центром в вершине угла. Далее добьёмся равенства отрезков CP и AQ, как в задаче 5.4. Построив траекторию середины отрезка PQ, получим *отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.*

Решение. Проведём среднюю линию трапеции RS, а также отрезки QU и PV, параллельные основаниям трапеции. Поскольку $CP = AQ$, отрезок RS — средняя линия также и трапеции $QVPU$, а значит, она делит пополам и её диагональ PQ. Следовательно, искомое множество принадлежит RS.

Пусть средняя линия RS пересекает диагональ AC в точке T, а диагональ BD — в точке W. Из треугольника DCA имеем $RT = \frac{DA}{2}$, из треугольника UPQ — $RX = \frac{UQ}{2}$, а из треугольника CDB — $RW = \frac{BC}{2}$. Поскольку $DA \leqslant UQ \leqslant BC$, получаем, что $RT \leqslant RX \leqslant RW$, т. е. точка X лежит на отрезке TW. (Отметим, что если равнобокую трапецию заменить на параллелограмм, то искомым множеством середин будет всего одна точка, поскольку все неравенства в предыдущей фразе обратятся в равенства.)

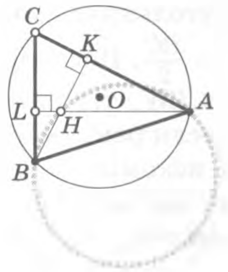


Теперь докажем, что любая точка отрезка TW подходит. Выберем на отрезке TW произвольную точку X и отобразим отрезок AB центрально-симметрично относительно X. Назовём полученный отрезок A_1B_1, а точку пересечения отрезков A_1B_1 и CD назовём E_1. Точка A_1 попадёт на основание BC (поскольку средняя линия делит пополам любой отрезок с концами на основаниях), а $A_1B_1 \parallel AB$. Треугольник A_1EC равнобедренный (углы при основании равны). Отметим точку E, центрально-симметричную E_1 относительно X. Она попадёт на отрезок AB, причём $EX = XE_1$, $AE = A_1E_1 = E_1C$ в силу симметрии. Итак, для произвольной точки X отрезка TW существует искомый отрезок, что и требовалось доказать.

Замечание. Задача упростится, если попросить доказать только, что множество середин отрезков PQ лежит на одной прямой.

Задача усложнится (но ответ не изменится), если вместо трапеции взять произвольные отрезки AB и CD и пустить по ним точки P и Q со скоростями, пропорциональными длинам отрезков (так что движение точек P и Q начинается одновременно и заканчивается одновременно).

Д39. а) **Эксперимент** см. в задаче 2.6.



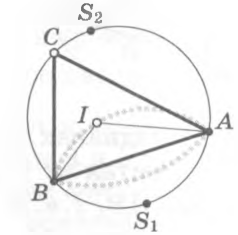
Ответ: окружность, симметричная данной относительно прямой AB.

Решение. Пусть точка C лежит на большей дуге окружности и вписанный угол ACB равен γ. Заметим, что для любой точки C_1, лежащей на меньшей дуге этой окружности, угол AC_1B равен $180° - \gamma$. Поскольку в четырёхугольнике $HKCL$ два угла прямые, угол KHL равен $180° - \gamma$. Угол AHB вертикальный с ним и тоже равен $180° - \gamma$. Следовательно, точка H лежит на дуге окружности, симметричной меньшей дуге AB относительно прямой AB.

Аналогично если точка C лежит на меньшей дуге AB, то вписанный угол ACB равен $180° - \gamma$. Тогда угол KHL равен γ, следовательно, H лежит на дуге окружности, симметричной большей дуге AB относительно прямой AB.

Замечание. Можно также при решении использовать тот факт, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно прямой, содержащей его сторону, лежит на описанной окружности треугольника. Поскольку у множества рассматриваемых треугольников ABC одна и та же описанная окружность, множеством точек, симметричных ортоцентру H относительно фиксированной прямой AB, является эта же окружность. А значит, искомым множеством является окружность, симметричная данной относительно прямой AB.

б) **Эксперимент.** В конструкции задачи 2.6 построим биссектрисы углов A и B, отметим точку их пересечения I и будем вычерчивать её след при движении точки C по окружности. Получим *дуги двух окружностей с концами в точках A и B*. Построив окружность по точкам A, B, I, увидим, что её центр лежит в точке S пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB с исходной окружностью, она же точка пересечения биссектрисы угла C с окружностью (таких точек две, каждая соответствует своей дуге).

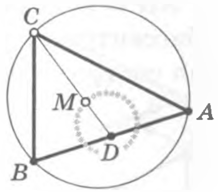


Решение. Докажем, что в обозначениях предыдущего абзаца справедливо равенство $SA = SB = SI$ (*теорема о трилистнике*). Равенство $SB = SA$ очевидно из определения точки S. Пусть угол CAB равен 2α, угол ACB равен 2γ. Тогда $\angle AIS = \alpha + \gamma$ как внешний угол треугольника ACI. В свою очередь, $\angle IAS = \angle IAB + \angle BAS = \alpha + \angle BCS = \alpha + \gamma = \angle AIS$. Следовательно, треугольник AIS равнобедренный, $SA = SI$. Итак, для любой точки I имеем $IS = IA = \text{const}$. Значит, точка I лежит на дуге окружности с центром S.

Докажем, что любая точка указанной дуги является точкой пересечения биссектрис одного из треугольников ABC. Пусть на окружности даны такие точки A, B и S, что $AS = BS$. Построим дугу окружности с центром S и радиусом SA, лежащую внутри исходной окружности. Отметим на дуге произвольную точку I. По S и I построим C. Обозначим $\angle ACS = \angle BCS = \gamma$ (они равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги), $\angle IAB = \alpha$, $\angle IAC = x$. Рассуждая аналогично предыдущему абзацу, получаем $\angle AIS = x + \gamma = \angle IAS = \alpha + \gamma$, а значит, $x = \alpha$.

Замечание. Более слабое утверждение о том, что множество точек пересечения биссектрис представляет собой объединение двух дуг окружностей с концами в точках A и B, можно доказать с помощью формулы, связывающей угол между двумя биссектрисами треугольника с углом при третьей вершине (в духе пункта а)).

в) **Ответ.** Окружность радиусом втрое меньше, чем у исходной окружности, с центром в точке пересечения медиан треугольника AOB (O — центр исходной окружности).



Решение. По теореме о медианах точка M делит медиану CD в отношении $2:1$, считая от точки C. Заметим, что точка D — середина отрезка AB, т. е. фиксированная точка. Следовательно, траектория точки M получается из исходной окружности гомотетией с центром в точке D и коэффициентом $\frac{1}{3}$, т. е. это окружность, причём втрое меньшего радиуса.

Замечание. Задача в) легко обобщается на случай произвольной траектории точки C. Задачи а) и б) становятся весьма сложными уже для случая прямой траектории точки C (см. задачу Д40 в), г)).

Д40. а) **Ответ.** Отрезок серединного перпендикуляра к AB.

б) **Ответ.** Прямая, равноудалённая от AB и k.

в) **Ответ.** Парабола, проходящая через вершины A и B, осью симметрии которой является серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Указание. Обозначим вершины треугольника через A, B и C, ортоцентр — H. Введём систему координат так, чтобы точки имели следующие координаты: $A(-a; b)$, $B(a; b)$, $C(x; 0)$, $H(x; y)$. Нам надо найти зависимость y от x. Выпишем координаты векторов CB $(a - x; b)$ и AH $(a + x; y - b)$.

Приравняем скалярное произведение этих векторов нулю: $a^2 - x^2 + yb - b^2 = 0$, откуда следует, что $y = \frac{x^2}{b} + \frac{b^2 - a^2}{b}$. Нетрудно проверить, что при $x = \pm a$ выполнено равенство $y = b$.

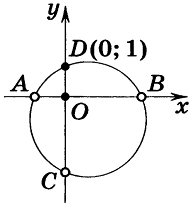
г) **Указание.** Обозначим вершины треугольника через A, B и C, а точку пересечения биссектрис — через I. Введём систему координат так, чтобы точки имели следующие координаты: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(c; s)$, $I(x; y)$. Тогда площадь треугольника ABC равна s, y равно радиусу вписанной окружности, поэтому $y = \frac{2s}{2 + AC + BC}$, x равно расстоянию от точки I до серединного перпендикуляра к AB, поэтому $x = \frac{|AC - BC|}{2}$. Теперь, выражая AC и BC через c и s, можно задать искомую кривую параметрически.

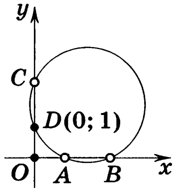
Замечание. Зная ответ к задаче в), можно устно решить следующую задачу. Вершины A и B треугольника ABC принадлежат параболе, осью симметрии которой является серединный перпендикуляр к отрезку AB. Вершина C «бегает» по этой же параболе. Найдите траекторию точки пересечения высот треугольника ABC. (Источник задачи: `http://janka-x.livejournal.com/256598.html`.)

Д41. Эксперимент. Для того чтобы строить разные параболы, можно создать ползунки, задающие значение коэффициентов p и q. Введём систему координат, построим график $y = x^2 + px + q$. Построим окружность, проходящую через точки пересечения параболы с осями, подвигаем ползунки. Парабола движется, при этом радиус и центр окружности изменяются. Попросим окружность оставлять след. Заметим, что множество следов имеет общую точку $(0; 1)$.

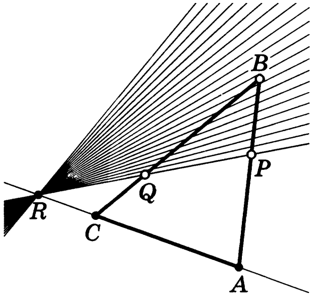
Решение. Докажем, что все проведённые окружности содержат точку $D(0; 1)$. Пусть x_1, x_2 — корни трёхчлена $x^2 + px + q$. Парабола пересекает ось OX в точках $A(x_1; 0)$ и $B(x_2; 0)$, а ось OY — в точке $C(0; q)$. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть D — вторая точка пересечения окружности с осью ординат. По свойству хорд (секущих), проведённых в окружности через одну точку, получим $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Так как $OC = |q|$ и $OA \cdot OB = |x_1| \cdot |x_2| = |x_1 x_2| = |q|$ (по теореме Виета), имеем

$OD = 1$. Поскольку точка D имеет положительную ординату, имеем $D(0; 1)$, что и требовалось.





Д42. Эксперимент[1]. Построим треугольник ABC, отметим точки P и Q, как в условии, и проведём прямую PQ. При движении точки B прямая PQ также движется. Попросим прямую PQ оставлять след и увидим, что *у множества прямых PQ есть общая точка R*. Построив прямую AC, увидим, что точка R расположена на ней. Чем



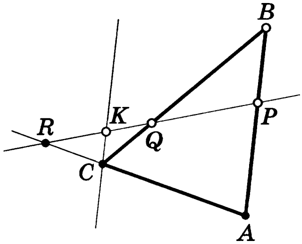
может определяться её положение? Что зафиксировано на этом подвижном чертеже, кроме точек A и C? При движении точки B длины отрезков AB и BC меняются, однако постоянны *отношения* $AP : PB$ и $BQ : QC$ — выведем их на экран. Из эксперимента мы видим, что постоянно аналогичное отношение $CR : RA$, — выведем на экран и его. При движении вершины B все три отношения постоянны. Если же двигать точку P, например, в сторону точки B, то отношение $AP : PB$ растёт, $BQ : QC$ постоянно, а $CR : RA$ уменьшается. Выведем на экран произведение всех трёх от-

[1]Это рассуждение автор узнал от В. Н. Дубровского.

ношений. Оно оказывается равно 1 не только при движении точки B, но и при любой деформации треугольника и при любом движении точек P и Q по сторонам!

Получаем гипотезу: *если на сторонах AB и BC и на продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R, лежащие на одной прямой, то* $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ (прямая теорема Менелая).

Указание. Проведём прямую из точки C параллельно AB. Пусть она пересекает прямую PR в точке K. Докажите, что подобны треугольники APR и CKR, а также BQP и CKQ. Выразите из обоих подобий CK (через отрезки, упомянутые в теореме Менелая) и приравняйте.



Д43. Ответ. Если D — середина отрезка AB, то все прямые GE параллельны AB. Если D не середина отрезка AB, то при данном положении D все прямые GE проходят через одну и ту же точку, лежащую на прямой AB.

Указание. Докажите сначала, что прямые AB и GE параллельны тогда и только тогда, когда D — середина отрезка AB. Пусть теперь D не середина отрезка AB. Обозначим точку пересечения прямых GE и AB через X. По теореме Чевы $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$, а по теореме Менелая $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$. Поделив почленно второе равенство на первое, получим $\frac{AX}{XB} = \frac{AD}{DB} = \mathrm{const}$. Следовательно, точка X не зависит от выбора точки F на отрезке CD.

Д44. Указание. Задав параметры $a > 0$ и k с помощью ползунков, постройте график параболы $y = kx - a(1 + k^2)x^2$. Меняя k и строя след параболы, постройте множество таких парабол. Их огибающая сама похожа на *параболу*, ось которой совпадает с осью OY, а ветви направлены вниз. Действительно, получим условие на множество точек $(x; y)$, принадлежащих параболам:

$$y = kx - a(1 + k^2)x^2 \qquad (*)$$

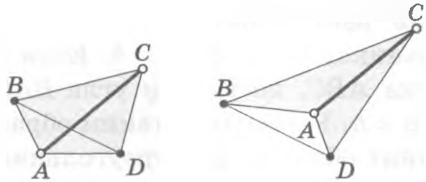
при всех возможных k. Спросим себя, при каких x и y найдутся такие k, что выполнено равенство $(*)$. Для ответа на этот вопрос перепишем равенство $(*)$ как уравнение относительно k: $ax^2k^2 - xk + (ax^2 + y) = 0$. Вычислим дискриминант и потребуем его неотрицательности: $D = x^2 - 4ax^2(ax^2 + y) \geqslant 0$. Отсюда имеем $y \leqslant \frac{1}{4a} - ax^2$. Граница этой зоны называется *параболой безопасности*. Подробнее о физическом смысле этой задачи говорится в книге *В.Г.Болтянский*. Огибающая. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

Д45. Ответ. а) $PQ = \frac{1}{2}AC = \text{const}$. б) $\angle POQ = \frac{1}{2}\angle AOC = \text{const}$.

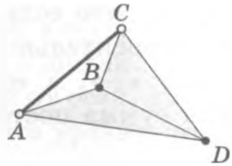
Д46. Ответ. а) Угол ABC равен половине дуги AC, поэтому он постоянен на каждой из двух дуг. б) Биссектриса угла B всегда проходит через середину дуги AC.

Д47. Эксперимент. Построим четырёхугольник $ABCD$, выведем на экран его площадь и периметр. Будем тянуть стрелкой отрезок AC — он будет перемещаться, оставаясь равным и параллельным себе. При этом углы и длины сторон четырёхугольника изменяются (это видно непосредственно), периметр тоже. А вот *площадь остаётся неизменной*, даже если четырёхугольник становится невыпуклым! Двигая диагональ на подвижном чертеже, удобно выделить три случая для анализа: 1) диагонали пересекаются (выпуклый четырёхугольник), 2) одна диагональ пересекает продолжение другой диагонали (невыпуклый четырёхугольник), 3) ни одна из диагоналей не пересекает продолжение другой диагонали (самопересекающаяся ломаная).

Указание. Пусть точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Тогда сумма расстояний $h_B + h_D$ от B и D до AC равна проекции отрезка BD на прямую, перпендикулярную к AC, т. е. постоянна. Поэтому $S_{ABCD} = S_{BAC} + S_{DAC} = \mathrm{const}$.

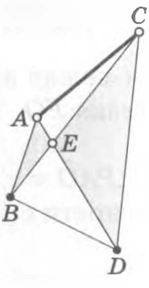


Пусть точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC, но точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD. Тогда $|h_D - h_B| = \mathrm{const}$ (равно той же самой проекции отрезка BD). Поэтому $S_{ABCD} = |S_{DAC} - S_{BAC}| = \mathrm{const}$.

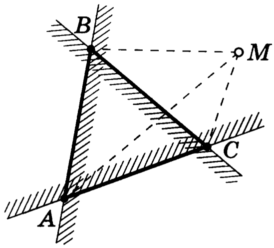


Замечание. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ наш результат сразу следует из формулы $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha$ (где α — угол между диагоналями). Наши рассуждения показывают, что эта формула верна и для невыпуклого четырёхугольника.

Если точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC, а точки A и C лежат по одну сторону от прямой BD, то получится самопересекающаяся фигура. Программа показывает, что и её площадь неизменна и равна той же величине, но это потому, что программа считает площадь такой фигуры как *разность* площадей двух треугольников, из которых она составлена.



Д48. Эксперимент. Обозначим искомое расстояние через a. Построим три прямые, содержащие стороны треугольника, выведем на экран длины a, b, c, h. Двигая точку M по плоскости, будем изучать соотношение между этими четырьмя величинами. Если точка M находится внутри треугольника, то $a + b + c = h$. Если точка M лежит вне треугольника ABC, но внутри угла BAC, то верно равенство $b + c - a = h$. Рассмотрев таким образом поочерёдно все шесть внешних областей для треугольника ABC, можно предложить такое правило. Для каждой из прямых AB, BC и CA назовём ту полуплоскость, которой принадлежит треугольник ABC, положительной, а другую отрицательной. (На рисунке положительные полуплоскости отмечены штриховкой.) Составим алгебраическую сумму расстояний от точки M до прямых так, что если M лежит в положительной полуплоскости относительно прямой, то возьмём это расстояние со знаком «+», а если в отрицательной, то со знаком «−». Такая сумма постоянна и равна высоте треугольника.

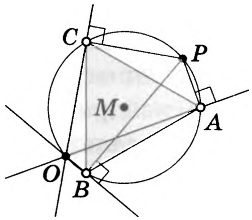


Указание. Выразите площадь треугольника ABC через площади треугольников AMB, BMC и AMC и запишите формулы, выражающие эти площади через основания и высоты.

Д49. Ответ. Пять точек лежат на окружности с центром в точке M — середине отрезка PO. Треугольник ABC равносторонний.

Указание. Поскольку $\angle PAO = \angle PBO = \angle PCO = 90°$, точки A, B, C лежат на окружности с диаметром PO (ср. задачу 2.5 а)).

Пусть точки расположены так, как на рисунке. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABC = \angle AOC = 60°$, а также $\angle ACB = \angle AOB = 60°$.



Д50. Ответ. Угол KBL постоянен и равен 30°.

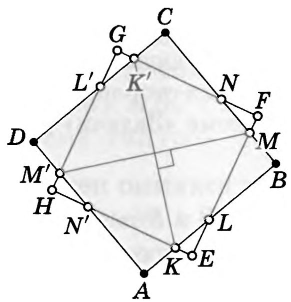
Указание. Постройте такую точку O, что $OBCL$ — параллелограмм. Докажите, что $OBAK$ также параллелограмм, точки K, L, B лежат на окружности с центром O, а угол KOL равен 60°.

Д51. Ответ. Отрезок касательной в первой четверти делится точкой касания пополам. Площадь треугольника, отсекаемого касательной от осей, постоянна и равна 2.

Указание. Выпишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $A(x; 1/x)$ и найдите координаты точек пересечения графика касательной с осями. Получатся точки с координатами $B(2x; 0)$ и $C\left(0; \frac{2}{x}\right)$. Площадь треугольника OBC равна $OB \cdot \frac{OC}{2} = 2x \cdot \frac{2}{x} : 2 = 2$.

Замечание. Можно сказать, что (равнобочная) гипербола является огибающей прямых, отсекающих от прямого угла треугольники одной площади.

Д52. Эксперимент. Построим два квадрата $ABCD$ и $EFGH$ и назовём точки пересечения (против часовой стрелки) K, L, M, N, K', L', M', N'. Заметим, что *отрезки KK' и MM'*



равны и пересекаются под прямым углом. Измерения длин и углов при взаимном движении квадратов подкрепляют эту гипотезу. То же верно для отрезков NN' и LL'.

Указание. Подвигайте квадрат $EFGH$ параллельно его сторонам. (Добейтесь параллельными переносами, чтобы центры квадратов совпали.)

Решение.

1. Пусть квадраты имеют общий центр O. Тогда при повороте квадрата $EFGH$ на 90° против часовой стрелки вокруг точки O точка K переходит в M, а K' — в M'. Следовательно, при этом повороте KK' переходит в MM', т. е. эти отрезки пересекаются под прямым углом и равны.

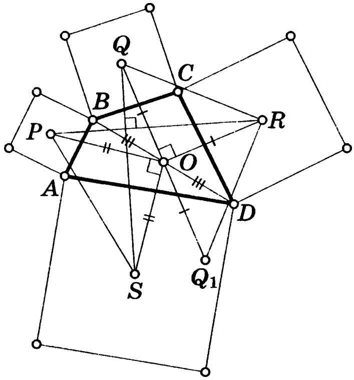
2. Пусть квадрат $ABCD$ имеет центр O, а квадрат $EFGH$ имеет центр S, причём S и O не совпадают. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{SO} = \vec{f} + \vec{h}$, где вектор $\vec{f}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{EF}$, а вектор $\vec{h}$ — вектору $\overrightarrow{EH}$. При перемещении квадрата $EFGH$ на вектор $\vec{f}$ отрезок MM' остаётся на месте (так как стороны EF и GH перемещаются вдоль себя). Точка K переместится вдоль прямой AB на расстояние $\frac{|f|}{\cos\alpha}$, где α — угол между векторами $\vec{f}$ и $\overrightarrow{AB}$. А точка K' переместится вдоль прямой CD на такое же расстояние. Таким образом, отрезок KK' останется равным и параллельным себе. При перемещении на вектор $\vec{h}$ возникает аналогичная ситуация (с точностью до наоборот).

Таким образом, при перемещении квадрата $EFGH$ на вектор $\overrightarrow{SO}$ длины отрезков KK' и MM' и угол между ними сохранятся. Но после этого перемещения отрезки равны и перпендикулярны по доказанному в предыдущем абзаце.

Замечание. Задача представляет собой усложнённый вариант известной задачи о равенстве двух перпендикулярных отрезков с концами на противоположных сторонах квадрата. Другое решение см. в задаче № 4871 в системе «Задачи» [web5].

Д53. Ответ. Равны и взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть P, Q, R и S — центры квадратов, построенных соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$. Рассмотрим поворот на угол 90° вокруг точки Q, переводящий вершину B в вершину C, и поворот на угол 90° вокруг точки R, переводящий C в D. Композиция этих поворотов есть поворот на угол 180°, т. е. центральная симметрия. Центр O этой симметрии — середина отрезка BD, так как при рассматриваемой композиции поворотов точка B переходит в D.



Пусть Q_1 — образ точки Q при этой композиции, тогда отрезок QQ_1 проходит через точку O и делится ею пополам. Поэтому RO — высота равнобедренного прямоугольного треугольника QRQ_1 и ROQ также равнобедренный прямоугольный треугольник.

Аналогично SOP — равнобедренный прямоугольный треугольник.

Следовательно, при повороте на угол 90° вокруг точки O, переводящем точку Q в точку R, точка S переходит в точку P, а отрезок QS — в отрезок RP. Поэтому указанные отрезки равны и перпендикулярны. Решение взято из задачи № 6028 в системе «Задачи» [web5].

Д54. Ответ. Треугольник ABC с прямым углом B.

Указание. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $2R = \dfrac{AC}{\sin B} \geqslant AC$.

Д55. Ответ. Если на прямой k есть точка, из которой отрезок AB виден под прямым углом, то она искомая (их чаще всего две). Если такой точки нет, то искомая точка — это точка касания окружности, проходящей через точки A и B, с прямой k.

Указание. Примените теорему синусов для треугольника ABC.

Д56. Ответ. Середина отрезка, соединяющего проекции точек A и B на прямую m.

Указание. Пусть N — середина отрезка AB, а N_1 — середина её проекции на m. Тогда по формуле для медианы треугольника ABM имеем $2(AM^2 + BM^2) = AB^2 + 4MN^2 \geqslant \geqslant AB^2 + 4N_1N^2$.

Д57. Эксперимент. Построим прямую l и точки A и B, как в условии. Отметим на прямой точку C и построим окружность, проходящую через три точки A, B и C. На пересечении окружности и прямой отметим точку D. Выведем на экран длину отрезка CD. Будем двигать точку C и наблюдать за длиной отрезка. В точке минимума *отрезок CD делится пополам отрезком AB.*

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Заметим, что $CO \cdot OD = AO \cdot OB$ как отрезки хорд окружности. Тогда $CD = CO + OD \geqslant 2\sqrt{CO \cdot OD}$ по неравенству о средних. Однако $\sqrt{CO \cdot OD} = \sqrt{AO \cdot OB} = \text{const}$. При этом равенство (и минимум CD) достигается, когда $CO = OD$.

Центр искомой окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AB и перпендикуляра к прямой l, проходящего через точку O.

Д58. Ответ. Вписанный четырёхугольник.

Решение. Построим вписанный четырёхугольник $ABCD$ с заданными длинами сторон (почему он существует?) и зафиксируем сегменты его круга. Рассмотрим четырёхугольник $A'B'C'D'$, длины сторон которого равны длинам соответствующих сторон четырёхугольника $ABCD$, а углы другие. Теперь на четырёхугольник $A'B'C'D'$ «оденем» соответствующие сегменты круга четырёхугольника $ABCD$. Получим замкнутую кривую, длина которой равна длине описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. А вот площадь, заключённая внутри кривой, меньше площади круга, соответствующего $ABCD$ (согласно изопериметрической задаче площадь круга больше площади любой другой фигуры того же периметра). Поскольку площади сегментов, соответствующих AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CD и $C'D'$, DA и $D'A'$, одинаковы, площадь четырёхугольника $ABCD$ больше площади четырёхугольника $A'B'C'D'$.

Д59. Эксперимент. а) Получим некоторую точку внутри треугольника. Естественно ожидать, что это одна из замечательных точек. Проверяя последовательно замечательные точки треугольника, получим, что *минимум достигается в точке пересечения медиан.*

Решение 1. Воспользуемся неравенством Лейбница. Пусть в треугольнике ABC точка M — центр масс, K — произвольная точка. Тогда

$$AK^2+BK^2+CK^2=AM^2+BM^2+CM^2+3KM^2.$$

Поскольку первые три слагаемые в правой части равенства фиксированы, минимум левой части достигается тогда же, когда достигается минимум KM^2. Значит, а) $K=M$, б) K — проекция точки M на прямую l.

Решение 2. а) Введём систему координат, пусть координаты вершин (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), а координаты переменной точки — (x, y). Тогда минимизируемая величина равна

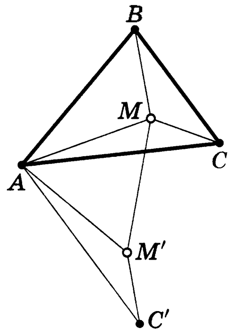
$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_1)^2+(y-y_2)^2+(y-y_3)^2.$$

Сначала минимизируем по x:

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2=$$
$$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\dots$$

Значит, минимум достигается при $x=x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$. Аналогично минимум по y достигается при $y=y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. Тем самым точка минимума (x_0, y_0) — это точка пересечения медиан треугольника.

Д60. Эксперимент. Отметим внутри треугольника ABC точку M, проведём отрезки AM, BM и CM, сложим их длины, будем двигать точку M и следить за суммой $AM + BM + CM$. *В точке минимума углы AMB, BMC, CMA равны по* $120°$.



Решение. Повернём точки M и C на $60°$ относительно точки A, образы назовём M' и C'. Заметим, что $MM' = AM$ (так как треугольник AMM' равносторонний), а $CM = C'M'$. Положение точек B и C' не зависит от положения точки M. Имеем $AM + BM + CM = BM + MM' + M'C'$. Последняя сумма минимальна, если отрезок MM' лежит на отрезке BC', а это условие выполнено, если $\angle AMB$ и $\angle AM'C' = \angle AMC$ равны по $120°$.

Замечание. Найденная точка называется *точкой Ферма—Торричелли*. Поучительно решить эту задачу также для тупоугольного треугольника. Оказывается, если в нём есть угол, больший или равный $120°$, то ответом будет вершина тупого угла. Этот факт легко «просмотреть», изучая задачу экспериментально. Однако проверить треугольник с углом больше $120°$ подталкивает то теоретическое соображение, что в таком треугольнике просто нет точки, найденной в предыдущем решении!

Д61. Ответ: а), б) Точка пересечения медиан треугольника.

Указание. Пусть a_i — i-я сторона треугольника, d_i — расстояние от точки X до этой стороны, S — площадь треугольника. Тогда $2S = a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3$. Поэтому произведение $(a_1d_1)(a_2d_2)(a_3d_3)$ будет наибольшим, если $a_1d_1 = a_2d_2 = a_3d_3$. Но последнее требование задаёт точку Y, а первое —

точку X (так как величина $a_1a_2a_3$ постоянна). Это значит, что если точка Y существует, то она совпадает с точкой X.

Покажем, что равенство $a_1d_1 = a_2d_2 = a_3d_3$ означает, что X — точка пересечения медиан треугольника ABC. Обозначим точку пересечения прямых AX и BC через A_1. Тогда $BA_1 : A_1C = S_{ABA_1} : S_{ACA_1} = S_{ABO} : S_{ACO} = (a_3d_3) : (a_2d_2) = 1$, т. е. AA_1 — медиана. Аналогично доказывается, что точка X лежит на медианах BB_1 и CC_1.

Замечание. Задачу можно обобщить на выпуклые многоугольники. Точка Y существует не всегда (даже в четырёхугольнике — для параллелограмма существует, а для равнобедренной трапеции уже нет), но если существует, то совпадает с точкой X.

Д62. Ответ. Проведём отрезок OM и построим прямую, проходящую через точку M перпендикулярно OM. Искомый отрезок AB лежит на этой прямой.

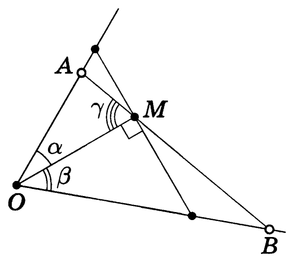
Решение. Пусть $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$, $\angle OMA = \gamma$. Тогда по теореме синусов $AM = \dfrac{OM \sin\alpha}{\sin(\gamma+\alpha)}$, $BM = \dfrac{OM\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$. Преобразуем искомое выражение:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} = \frac{1}{OM}\cdot\left(\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{OM}\cdot(\cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha + \sin\gamma\operatorname{ctg}\beta - \cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{OM}(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)\sin\gamma.$$

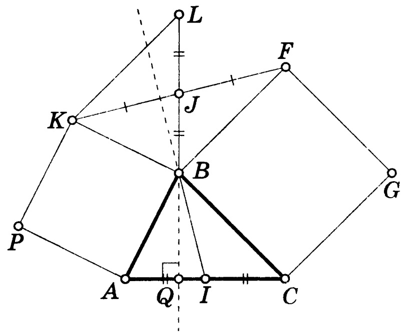
Поскольку OM, α и β фиксированы, максимум выражения достигается, когда максимален $\sin\gamma$, т. е. при $\gamma = 90^\circ$.



Д63. а) **Ответ.** При $AB = BC$.

б) **Ответ. Биссектрисы треугольников ABC и KBF лежат на одной прямой, медиана одного треугольника лежит на продолжении высоты другого, и наоборот.**

Решение.



Утверждение о биссектрисах доказывается прямым счётом углов.

Пусть J — середина отрезка KF. Докажем, что прямая BJ перпендикулярна AC. Достроим треугольник KBF до параллелограмма $KBFL$. Пусть угол ABC равен β. Тогда угол KBF равен $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \beta = 180^\circ - \beta$, а угол BKL равен β. Следовательно, треугольник KBL равен треугольнику ABC по двум сторонам и углу между ними. Обозначим точку их пересечения через Q, а угол BAC через α. Тогда угол KBL также равен α в силу равенства треугольников BKL и ABC. Угол ABQ равен $180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$. Значит, в треугольнике AQB угол Q прямой. (Попутно мы доказали, что $BJ = \frac{1}{2}AC$.)

Теперь рассмотрим прямую BI, делящую отрезок AC пополам. Она перпендикулярна KF, что доказывается аналогично.

в) **Ответ.** Отрезки AR и CO пересекаются в середине отрезка BD.

Указание. Докажите, что $AK \parallel BD \parallel FC$. С помощью подобных треугольников выразите через OA и RC отрезки, отсекаемые от BD отрезками AR и OC.

г) **Ответ.** 135°.

Указание. Докажите, что площади треугольников KBF, GCN и MAP равны площади треугольника ABC. Выразите площадь оптимизируемого шестиугольника через a, c и угол ABC.

Д64. а) **Ответ.** Прямая AB.

б) **Ответ.** Все серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке — в середине O отрезка, соединяющего центры окружностей O_1 и O_2 (тем самым точка O равноудалена от точек K' и L' для любой прямой p).

Указание. Рассмотрите четырёхугольник $O_1K'L'O_2$ и докажите, что серединный перпендикуляр к $K'L'$ пересекает O_1O_2 в его середине.

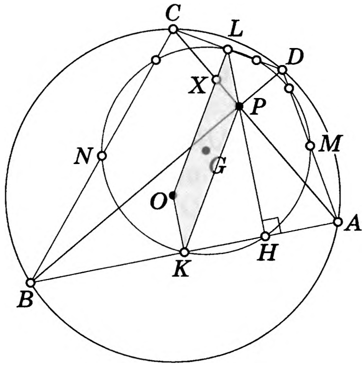
в) **Указание.** Эту точку можно обнаружить экспериментально, аналогично пункту б), построив множество серединных перпендикуляров ко всем отрезкам KL. Они пересекаются в такой точке A_1, что $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AO}$. Применяя гомотетию конструкции из предыдущего пункта с центром A и коэффициентом 2, получаем решение задачи.

г) **Указание.** Докажите, что велосипедисты всегда находятся на одной прямой с точкой A (см. решение задачи 8.5, первый абзац). После этого задача сводится к предыдущему пункту.

Д65. Эксперимент. Построим взаимно перпендикулярные хорды окружности, пересекающиеся в фиксированной точке, как в задаче 1.6. Достроим четырёхугольник $ABCD$, отметим середины сторон AB и CD, построим отрезки KL и PO и будем вращать хорду AC.

а) Похоже, что *отрезки PO и KL делят друг друга пополам.* Гипотеза подкрепляется построением их середин и вращением хорды AC. Обе середины совпадают с точкой пересечения отрезков G. Заметим, что точка G неподвижна как середина фиксированного отрезка OP.

б) Похоже, что *окружность пересекает четыре стороны четырёхугольника $ABCD$ в их серединах* (эта гипотеза легко подкрепляется построением середин двух оставшихся сторон BC и DA). *Оставшиеся четыре точки пересечения являются проекциями точки P на стороны четырёхугольника $ABCD$* (подкрепим гипотезу, проведя из P перпенди-



кулярные прямые к сторонам четырёхугольника $ABCD$ — кстати, эти же прямые пройдут через середины противоположных сторон).

Решение. а) Докажем, что $KOLP$ — параллелограмм, отсюда будет следовать, что его диагонали KL и OP делят друг друга пополам. Обозначим угол BAC через α. Тогда угол BDC также равен α как вписанный и опирающийся на ту же дугу. Далее, $\angle APK = \angle PAK = \alpha$ ($PK = AK$, так как PK — медиана в прямоугольном треугольнике APB). Пусть LO и CP пересекаются в точке X. Тогда стороны угла CDP перпендикулярны сторонам угла CXL ($OL \perp CD$, так как OL — медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника OCD; $CA \perp BD$ по условию), т. е. эти углы равны. Значит, угол между LO и CP тоже равен α. Следовательно, $PK \parallel LO$ как прямые, образующие равные накрест лежащие углы с AC. Аналогично можно доказать, что $PL \parallel KO$. Значит, $KOLP$ — параллелограмм.

б) Рассмотрим четырёхугольник $KNLM$, вершины которого являются серединами сторон четырёхугольника $ABCD$. Стороны четырёхугольника $KNLM$ параллельны взаимно перпендикулярным диагоналям четырёхугольника $ABCD$, следовательно, $KNLM$ — прямоугольник. По доказанному в пункте а) точка G — середина его диагонали KL, значит, она же является серединой равной ей диагонали NM. Поскольку G — центр окружности, а K лежит на окружности, точки N, L, M также лежат на окружности.

Заметим, что медиана PL треугольника PCD при продлении пересекает сторону AB под прямым углом (это легко вывести, посчитав углы аналогично задаче Д63 б). Назовём точку пересечения H. Поскольку треугольник LHK прямоугольный, а LK — диаметр окружности, точка H лежит на этой же окружности. А точка H и есть проекция точки P на AB. Аналогичные доказательства можно провести для остальных трёх проекций точки P.

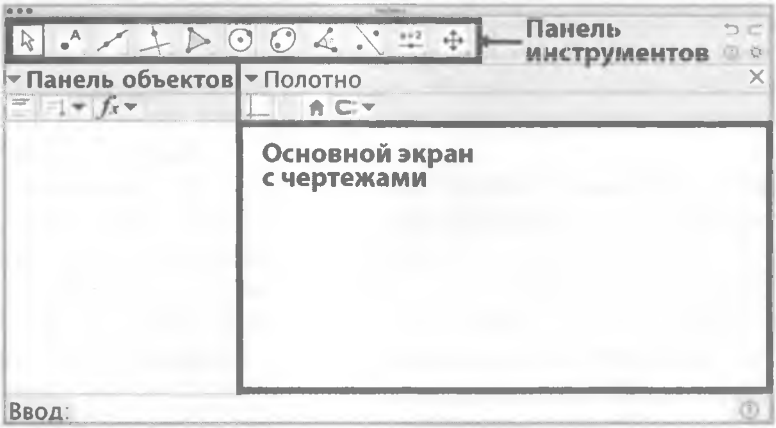
Замечание. Из подвижного чертежа можно также заметить, что радиус нашей «окружности восьми точек» не меняется при вращении хорды AC вокруг точки P. Это утверждение равносильно тому, что при указанном преобразовании $AC^2 + BD^2 = \text{const}$.

Словарик

«Геогебра» (GeoGebra Classic 5)[1]

«Геогебра» работает в режиме «*Инструмент*», т. е. сначала мы выбираем действие (инструмент), а потом объект, к которому хотим его применить.

(!) *При наведении курсора на иконку выбранного инструмента всплывает подсказка.*



Вид

(!) *По умолчанию «Геогебра» именует все появляющиеся объекты. Изменить это можно так: Настройки → Обозначения. Удобно выбрать «Только для точек».*

- Показать/убрать название объекта: наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой → Показывать обозначение.
- Переименовать объект: наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой → Переименовать.

---

[1]Версию для установки на компьютер можно бесплатно скачать здесь: https://www.geogebra.org/download → GeoGebra Classic 5 (есть также онлайн-версия, она менее функциональна). В 2017 г. появился пакет GeoGebra Geometry, содержащий только основные геометрические инструменты, он может быть более удобен для начинающих.

Оформление

(!) *По умолчанию свободные точки имеют синий цвет. Точки, привязанные к объекту, — голубой. Полностью связанные точки (пересечение двух линий) — чёрный цвет. Такой же цвет у их названий.*

- Менять цвет, толщину и стиль объектов: наводим курсор на объект и щёлкаем левой кнопкой → полоса в верхней левой части полотна → .
- Скрыть/показать объект: нажимаем в панели объектов на соответствующий кружок.
- Отметить штрихом отрезок/дужкой угол: наводим курсор на отрезок/угол и щёлкаем правой кнопкой → Свойства → Стиль → Оформление.

Построения

- Построить многоугольник[1]:  → отмечаем/строим вершины в порядке обхода, повторяя в конце первую.
- Прикрепить/снять точку с объекта (прямой, окружности, многоугольника):  → прикрепить/снять точку.

(!) *Этот инструмент помогает изменять соотношение между частями уже построенного чертежа, не строя заново.*

- Построить окружность с радиусом, равным данному отрезку:  → Окружность по центру и радиусу → указываем сначала центр, затем радиус (имя отрезка).
- Отметить середину отрезка/центр окружности/точку пересечения медиан треугольника:  → Середина или центр → указываем отрезок/окружность/треугольник.
- Нарисовать произвольную кривую:  → Карандаш.
- Построить эллипс, параболу или гиперболу: .
- Построить/отключить след объекта (не обязательно точки!): наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой → ставим/снимаем галочку «оставлять след».

[1]Как объект, а не как набор точек и отрезков.

- Стереть все следы: двигаем стрелкой экран за пустое место или меняем колесом мыши масштаб.
- Построить живой след точки:  → Локус → выбираем рисующую точку и связанную с ней точку-предка, двигающуюся по заданной траектории.
- Построить n-ю замечательную точку треугольника ABC: в строке ввода вводим команду `TriangleCenter[A, B, C, n]`. Например, $n=1$ — центр вписанной окружности, $n=2$ — центр масс, $n=3$ — центр описанной окружности, $n=4$ — ортоцентр.

Измерения

- Выбрать точность: Настройки → Округление → Число разрядов.
- Измерить отрезок: для любого отрезка его длина автоматически отображается в панели объектов.
- Измерить расстояние от точки до прямой: поверх перпендикулярной прямой проводим отрезок от данной точки до основания перпендикуляра и видим его длину в панели объектов.
- Площадь многоугольника автоматически отображается в панели объектов, если многоугольник построен как объект (а не как набор точек и отрезков), см. Построения.
- Периметр многоугольника можно найти «вручную», сложив стороны (см. Вычисления), а можно набрать в строке ввода: `Периметр[многоугольник]`. (Надо указать название многоугольника, а не перечисление его вершин.)

(!) *Для демонстраций удобно выводить прямо на полотно длину или периметр/площадь/угол:*  → *Расстояние или Длина/Площадь/Угол.*

Вычисления

В строке ввода надо ввести выражение, используя буквы, соответствующие величинам в панели объектов. Выражение $g_1 f + d^2$ можно набрать так: `g_1*f + d^2` → Enter.

(!) *Если надо визуализировать изучаемую величину, удобно использовать инструмент «Отрезок с фиксированной длиной», ведь в качестве его длины можно ввести выражение.*

Ползунки

(!) *Пригодятся, если в задаче есть численный параметр, который удобнее варьировать отдельно от самой фигуры.*

- Создать ползунок: .
  Появляются ползунок, задающий величину, и соответствующая ей буква, с которыми можно работать как с обычными величинами (например, строить отрезок такой длины или использовать в вычислениях).

Новые инструменты

(!) *Пригодятся, если вам часто приходится выполнять какую-то операцию, не предусмотренную в программе (например, строить вписанную окружность треугольника).*

- Создать инструмент: Инструменты → Создать инструмент. В «выходных объектах» выбираем результат, во «входных объектах» — входные данные, в «имя и значок» называем инструмент. Ваш инструмент появится под значком справа от основной линейки инструментов. Он сохранится в файле вместе с чертежом, при котором создан.

Представление результатов

Чертёж можно сохранить в формате ggb или же экспортировать в форматы:

- gif — будет демонстрироваться повторяющееся движение точки чертежа по траектории;
- html — интерактивный чертёж, который можно открывать из браузера и двигать, но нельзя делать новых построений и измерений (загружается в библиотеку на сайте «Геогебры», можно давать ссылку).

«Живая математика» (версия 5)

«Живая математика» работает в основном в режиме «Команда», т. е. сначала мы выбираем объект, а потом действие (команду), которое хотим к нему применить. Команды находятся в верхнем меню.

(!) *Программа подсвечивает те команды, которые можно выполнить при данном наборе выделенных объектов* (например, если выделены точка и прямая, то команды «параллельная» и «перпендикулярная» доступны, а команда «окружность» — нет).

(!) *Типичная ошибка: нужная команда недоступна, если выделены не все объекты или выделены лишние объекты.*

В левой панели собраны самые ходовые *инструменты*, в основном для построения.

Вид

- Назвать объект/убрать имя:  → указываем объект (или выделяем объект → Ctrl + K).
- Переименовать объект:  → наводим курсор на объект и дважды щёлкаем (или выделяем объект → Ctrl + /).
- Выделить предков или потомков объекта / освободить точку от линии: наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой.

Оформление

- Поменять цвет, стиль и цвет объекта: наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой. (Все следующие объекты будут изображаться такими же.)

- Писать текст: инструментом **A** выделяем область экрана и пишем в образовавшемся окошке.

(!) *Если в этом режиме инструмент* **A** *применить к объекту, его имя автоматически вносится в текст.*

Построения

- Построить многоугольник:  → отмечаем/строим вершины в порядке обхода, повторяя в конце первую (или выделяем вершины в порядке обхода → Ctrl + P).
- Построить окружность с радиусом, равным данному отрезку: выделяем центр и отрезок → Построения → Окружность по центру и радиусу.
- Построить/отключить след объекта (не обязательно точки!): наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой → ставим/снимаем галочку «оставлять след» (или выделяем объект → Ctrl + T).
- Стереть все следы: наводим курсор на пустое место и щёлкаем правой кнопкой → стереть следы (или Shift + + Ctrl + E).
- Построить живой след объекта (не только точки!): выделяем рисующий объект и связанную с ним точку-предка, двигающуюся по заданной траектории → Построения → Геометрическое место.

(!) *Можно выполнять за один раз несколько построений. Например, если выделены точка и две прямые, то доступна команда «Параллельные прямые», которая построит сразу две параллельные.*

Измерения

- Выбрать точность: Настройки/единицы → Точность → → Число разрядов.
- Расстояние от точки до точки / от точки до прямой (нескольких прямых): отмечаем нужные объекты → Измерения.
- Измерить угол: отмечаем две прямые или три точки в таком порядке: точка на стороне — вершина угла — точка на стороне → Измерения.

- Измерить периметр/площадь: отмечаем многоугольник (не набор точек и отрезков!) → Измерения.
- Измерить расстояние от точки до прямой: поверх перпендикулярной прямой проводим отрезок от данной точки до основания перпендикуляра и измеряем его длину.

(!) *Можно измерить сразу несколько длин, площадей, периметров, применив нужную команду сразу к нескольким объектам.*

Вычисления

Произвести арифметические действия с величинами: измеряем эти величины, Вычисления → Вычислить (или одновременно Alt и +) → выделяем величины и соединяем нужными арифметическими действиями → «=».

Параметры

(!) *Пригодятся, если в задаче есть численный параметр, который удобнее варьировать отдельно от самой фигуры.*

- Создать параметр: Вычисления → Новый параметр. Появляется параметр, с которым можно работать как с обычными величинами (например, строить отрезок такой длины или использовать в вычислениях).

Новые инструменты

(!) *Пригодятся, если вам часто приходится выполнять какую-то операцию, не предусмотренную в программе (например, строить вписанную окружность треугольника).*

- Создать инструмент: строим нужную конфигурацию, выбираем входные данные и результат (например, три вершины треугольника и вписанную окружность) → → ▶⁝ → Создать новый инструмент → называете его.

  Ваш инструмент появится под значком ▶⁝. Он сохранится в файле вместе с чертежом, при котором создан.

Представление результатов

Чертежи можно сохранять как файлы «Живой математики» или как html-файлы, с которыми можно работать в браузере.

«Математический конструктор» (версия 6)[1]

«Математический конструктор» работает и в режиме «*Команда*», и в режиме «*Инструмент*», т. е. мы можем сначала выбрать объект, а потом действие, а можем и наоборот.
(!) *При выборе любой команды внизу экрана появляется подсказка с дальнейшими действиями.*

Вид

- Назвать объект/убрать имя: «Т».
- Переименовать объект: в режиме инструмента «Т» нажимаем на имя.

  Наведя курсор на объект и щёлкнув правой кнопкой, можно выделить его предков или потомков, а также освободить точку от линии или привязать к ней.

(!) *Этот инструмент помогает изменять соотношение между частями уже построенного чертежа, не строя заново.*

- Скрыть объект: .

  Показать всё скрытое:  (применение в этом режиме инструмента  возвращает объект в видимые).

Оформление

- Поменять цвет и стиль линии или точки: наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой.
- Писать текст: инструментом «Т» выделяем область экрана и пишем в образовавшемся «окошке».

(!) *Если в этом режиме инструмент «Т» применить к объекту, его имя автоматически вносится в текст.*
(!) *В разделе «Оформление» есть опции «Отметить штрихом отрезок или дужкой угол».*

Построения

- Построить многоугольник: «Многоугольник» → выбираем/строим вершины в порядке обхода, повторяя в конце первую.

---

[1]В 2018 году ожидается выход бесплатной версии 7 с бо́льшим количеством функций, см. http://obr.1c.ru/mathkit/

(!) *Есть специальная команда для параллелограмма (Построения → Многоугольники).*

- Построить окружность с радиусом, равным данному отрезку: выделяем отрезок и центр → .

(!) *Под командой «Луч» есть команда «Отложить угол, равный данному». Под командой «Середина отрезка» — команда «Разделить отрезок на N равных частей».*

(!) *Можно выполнять за один раз несколько построений. Например, если выделены точка и две прямые, то доступна команда «Параллельные прямые», которая построит сразу две параллельные прямые.*

- Построить эллипс, параболу или гиперболу: .
- Построить след объекта (не обязательно точки!): наводим курсор на объект и щёлкаем правой кнопкой мыши → «рисовать/прекратить рисование следа».
- Очистить все следы: → «Удалить все следы».
- Построить живой след точки: (или Построения → → Геометрическое место точек) → выделяем точку, двигающуюся по заданной траектории, а затем рисующую точку-потомка.
- Построить живой след линии: → → (или Построения → Динамический след) → выделяем точку, двигающуюся по заданной траектории, а затем рисующую линию-потомка.

(!) *Под кнопкой «Макросы» прячется большое количество готовых инструментов для нестандартных построений (например, вписанная и вневписанные окружности треугольника, равнобедренная трапеция и т. д.).*

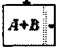
Измерения

- Выбрать точность: Файл → Предварительные настройки объектов → Измерения и вычисления → Формат результата.
- Все команды измерений находятся здесь: .
- Измерить расстояние от точки до прямой: поверх перпендикулярной прямой проводим отрезок от данной

точки до основания перпендикуляра и измеряем его длину.

(!) *Можно измерить сразу несколько длин, площадей, периметров, применив нужную команду сразу к нескольким объектам.*

Вычисления

- Вычислить сумму, разность, произведение или частное: измеряем нужные величины,  → нажимаем «стрелочку» и выбираем действие → отмечаем нужные величины → Enter.

(!) *Эта команда применима не только к числам, но и к векторам, областям, функциям и т. д.*

- Составить произвольное выражение:  → отмечаем место на экране для нового выражения → составляем выражение, вводя величины с помощью букв, выбирая на экране или добавляя по ходу, неарифметические действия выбираем в «Добавить функцию» → «ОК».

(!) *Специальная команда*  *выводит отношение двух отрезков или трёх точек.*

Параметры

(!) *Пригодятся, если в задаче есть численный параметр, который удобнее варьировать отдельно от самой фигуры.*

- Создать параметр:  → выбираем место для окошка. Появляется параметр, с которым можно работать как с обычными величинами (например, строить отрезок такой длины или использовать в вычислениях).

Представление результатов

(!) *Чертёж можно копировать, вставлять в Word и там редактировать как рисунок.*

Чертёж можно:

• сохранить в формате mkz, который воспроизводится не только в «Матконструкторе», но и в МК-плеере (бесплатен, рассчитан на учеников и имеет ограниченную функциональность),

• экспортировать в формат изображения или в html-формат, в котором можно работать в браузере.

Литература и веб-ресурсы

Список веб-ресурсов

[web1] Geogebra.org

Бесплатная программа с открытой платформой и банком задач, который можно использовать и пополнять.

[web2] dynamicgeometry.com

Платная программа The Geometer's SketchPad. Русифицированная версия называется «Живая математика».

[web3] http://obr.1c.ru/mathkit

Российская программа динамической математики с хорошей методической базой. Платная, но с бесплатной онлайн-версией (доступны базовые функции). Ожидается новая бесплатная версия.

[web4] Euclidea.xyz

Многоуровневая обучающая игра с задачами на построение.

[web5] zadachi.mccme.ru

Большой банк задач по геометрии с удобной навигацией.

[web6] zadachi.mccme.ru/prkr

Интернет-издание книги [4] с динамическими моделями.

[web7] http://janka-x.livejournal.com

Блог учителя математики И. С. Храповицкого с множеством задач и моделей в программах динамической геометрии.

Список литературы

[1] *А.В.Акопян*. Геометрия в картинках. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *А.Д.Блинков*. Геометрия в негеометрических задачах. М.: МЦНМО, 2016.

[3] *А.Д.Блинков*, *Ю.А.Блинков*. Геометрические задачи на построение. М.: МЦНМО, 2010.

[4] *Н.Б.Васильев*, *В.Л.Гутенмахер*. Прямые и кривые. М.: МЦНМО, 2004.

[5] *Р.К.Гордин*. Планиметрия. Задачник. М.: МЦНМО, 2004.

[6] *В.Дубровский*. Преобразования плоскости в задачах на построение // Квант. 1987. № 8. С. 40—42. (http://kvant.mccme.ru/1987/08/preobrazovaniya_ploskosti_v_za.htm)

[7] *О.А.Иванов*. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009.

[8] *С.Г.Иванов*, *В.И.Рыжик*. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». М.: Просвещение, 2013.

[9] *П.А.Карасёв*. Геометрия на подвижных моделях: изготовление и применение подвижных моделей геометрических форм (планиметрия). М.: Гос. изд-во, 1924.

[10] *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

[11] *Е.М.Рабинович*. Геометрия. 7—9 классы. Задачи и упражнения на готовых чертежах. М.: Илекса, 2007.

[12] *А.И.Сгибнев*. Исследовательские задачи для начинающих. М.: МЦНМО, 2015.

[13] *А.И.Сгибнев*. Экспериментальная математика // Математика. 2007. № 3. С. 2—8.

[14] *Кадзуо Хага*. Оригамика. Геометрические опыты с бумагой. М.: МЦНМО, 2012.

[15] *А.В.Шаповалов*. Математические конструкции: от хижин к дворцам. М.: МЦНМО, 2015.

[16] *Д.Э.Шноль* и др. Система открытых задач по геометрии: 7 класс / Д.Шноль, А.Сгибнев, Н.Нетрусова. М.: Чистые пруды, 2009. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика»; Вып. 28).

[17] *Д.Э.Шноль* и др. Система открытых задач по геометрии: 8 класс / Д.Шноль, А.Сгибнев, Н.Нетрусова. М.: Чистые пруды, 2009. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика»; Вып. 29).

[18] *Д.Э.Шноль*. Исследовательские задачи по математике в российской школе // Проблемы современного математического образования: материалы симпозиума. 2017. С. 113—132.

[19] *А. В. Ястребов*. Исследовательское обучение математике в школе. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018.

[20] Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М. В. Шабанова, Р. П. Овчинникова, А. В. Ястребов и др. М.: ИД «Академия Естествознания», 2016.

Источники [9, 12, 13, 16—20] *доступны в электронной библиотеке «Математическое образование»* (mathedu.ru).

Раздаточный материал

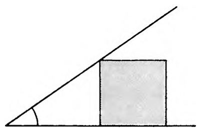
Занятие 1

1 (ч). а) Постройте треугольник, вершины которого лежат на фиксированной окружности.

б) Проведите окружность через три вершины фиксированного треугольника.

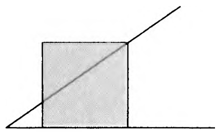
2. В фиксированную окружность впишите угол, опирающийся на фиксированную дугу (это значит, что точки пересечения сторон угла с окружностью фиксированы, а вершина угла «бегает» по окружности).

3. Зафиксирован острый угол. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — внутри угла. Сколько может быть таких квадратов?

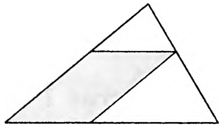


Указания. Чертёж должен хорошо читаться — используйте разные цвета, толщину линий, скрывайте вспомогательные линии. Буквы на чертеже должны быть такими же, как в условии.

4. Зафиксирован угол меньше 45 градусов. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — *вне угла*. Сколько может быть таких квадратов?

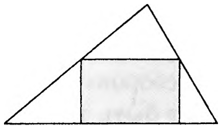


5. *Параллелограммом* называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны. Впишите в фиксированный треугольник ABC параллелограмм так, что одна его вершина совпадает с вершиной A исходного треугольника, а другие три лежат на его сторонах. Сколько может быть таких параллелограммов для данного треугольника?



6. *Хордой* называют отрезок, концы которого лежат на окружности. Постройте две взаимно перпендикулярные хорды фиксированной окружности, проходящие через фиксированную точку внутри окружности (не совпадающую с центром).

7. Впишите в фиксированный остроугольный треугольник ABC прямоугольник так, чтобы одна сторона прямоугольника лежала на отрезке AB, а две оставшиеся вершины — на отрезках AC и BC.



8. Постройте квадрат с фиксированным центром.

9*. Постройте правильный (равносторонний) треугольник с фиксированным центром.

Занятие 2

1. Найдите в данной окружности множество а) середин хорд данной длины, б) хорд данной длины.

2 (ч). Даны две перпендикулярные прямые OA и OB и точка C внутри угла AOB. Рассмотрим все такие прямоугольники $CDME$, что вершина D лежит на прямой OA, а вершина E — на прямой OB. Найдите множество точек M.

Указания. Надо 1) построить подвижный чертёж; 2) найти траекторию точки подвижного чертежа; 3) описать траекторию через фиксированные элементы чертежа; 4) выдвинув гипотезу, подкрепить её: построить указанную вами линию и проверить, что она совпадает с траекторией подвижной точки; 5) подкреплённую гипотезу сдать учителю.

3. В треугольнике ABC рассматривают все отрезки BD, у которых конец D лежит на стороне AC. Найдите множество середин таких отрезков.

4. На окружности с центром O дана точка A. Рассматривают все хорды, одним из концов которых является точка A. Найдите множество середин таких хорд. (В отличие от задачи 1, здесь длина хорды меняется!)

5. Даны точки A и B. Рассматривают все прямые BC, проходящие через точку B, и перпендикуляры, опущенные на них из точки A. а) Найдите множество точек D — оснований перпендикуляров. б) Найдите множество точек E, симметричных точке A относительно всех прямых BC.

6. Дана окружность, на ней зафиксированы точки A и B и «бегает» точка C. Найдите траекторию точки пересечения высот треугольника ABC.

7. В данный остроугольный неравнобедренный треугольник вписывают все прямоугольники, у которых две вершины лежат на основании и по одной — на боковых сторонах. Найдите множество точек пересечения диагоналей этих прямоугольников.

Занятие 3

1. Даны угол и точка A внутри него. Проведите отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, а середина совпадает с точкой A.

2. В данный остроугольный треугольник впишите квадрат так, чтобы две смежные вершины квадрата принадлежали одной стороне треугольника, а остальные две вершины — двум оставшимся сторонам.

3. Даны окружность и отрезок AB, длина которого меньше диаметра окружности. Постройте хорду окружности, равную и параллельную отрезку AB.

4. Даны угол и точка A внутри него. Проведите отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, а точка A делит его в отношении $1:2$.

5. Даны две пересекающиеся прямые и отрезок AB, не параллельный этим прямым. Соедините прямые отрезком, равным и параллельным AB.

6. В данный остроугольный треугольник ABC впишите равносторонний треугольник так, чтобы одна из его сторон была параллельна AB.

7. Даны прямая, две окружности по разные стороны от неё и отрезок данной длины. Постройте равнобедренный треугольник так, чтобы вершины его основания лежали на данных окружностях, а высота, проведённая к этому основанию, была равна данному отрезку и лежала на данной прямой.

8. Даны точка A и окружности ω_1 и ω_2. Постройте квадрат $ABCD$, так чтобы вершина B лежала на окружности ω_1, а вершина а) C, б) D — на окружности ω_2.

Занятие 4

1. Даны окружность и точка A внутри неё. Проведите через точку A хорду а) наибольшей длины, б) наименьшей длины.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Проведите через точку A прямую, равноудалённую от точек B и C.

Указания.

1) Постройте подвижный чертёж;

2) найдите искомую точку или прямую экспериментально;

3) поймите, какое свойство выделяет эту точку или прямую среди других, последовательно проверяя каждое из пяти свойств (*выдвижение гипотезы*);

4) постройте точку или прямую с найденным свойством и проверьте экспериментально, действительно ли она удовлетворяет условиям задачи (*подкрепление гипотезы*); если не удовлетворяет, вернитесь к пункту 3;

5) сдайте гипотезу учителю и попробуйте доказать её. Доказывать удобнее уже не на экране, а в тетради.

3. а) Постройте в плоскости выпуклого четырёхугольника $ABCD$ такую точку, что сумма расстояний от неё до вершин наименьшая. б*) Та же задача для невыпуклого четырёхугольника.

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M, и из неё опущены перпендикуляры MK и MP на катеты этого треугольника. При каком положении точки M длина отрезка PK будет наименьшей?

5. Найдите в остроугольном треугольнике точку, для которой сумма расстояний до вершин треугольника и до его сторон (всего шесть отрезков) — наименьшая.

6. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M, и из неё опущены перпендикуляры MK и MP на боковые стороны этого треугольника. При каком положении точки M сумма $MK + MP$ будет наименьшей?

7. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Через вершину A проведите прямую p так, чтобы сумма расстояний от неё до вершин B и C была наибольшей.

8. Даны угол и окружность внутри него (не имеющая общих точек со сторонами угла). Постройте точку окружности, сумма расстояний от которой до прямых, содержащих стороны угла: а) минимальна, б) максимальна.

Занятие 5

1. По взаимно перпендикулярным прямым OA и OB скользят концы отрезка CD фиксированной длины. а) На отрезке CD отмечена точка E. Изучите траекторию точки E в зависимости от её положения на отрезке. б*) Постройте множество всех отрезков CD.

2. Даны два непараллельных и непересекающихся отрезка AB и CD. Рассматривают все отрезки PQ с одним концом на AB и другим — на CD. Найдите множество середин отрезков PQ.

Указания. В этих задачах нужно построить, а затем изучить множество точек или линий. Чтобы выдвинуть гипотезу о виде множества, попытайтесь описать его в терминах исходных данных задачи. Отрезок удобно задавать двумя концами, а окружность — диаметрально противоположными точками или центром и радиусом. Изучая эллипс, полезно определить его центр, а изучая двумерную фигуру, надо понять, какая у неё граница. Гипотезу нужно подкрепить с помощью построений и измерений, сдать учителю и доказать на бумаге. Если вы можете доказать гипотезу сразу, то подкреплять её необязательно.

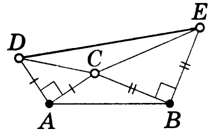
3. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности от центра отложен отрезок OX, равный перпендикуляру, проведённому из точки M к прямой AB. Найдите множество точек X.

4 (ч). Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Точки Q и P одновременно начинают движение с равными скоростями: Q по отрезку AB из вершины A, а P — по отрезку BC из вершины B. а) Найдите траекторию середины отрезка PQ. б*) Постройте траекторию самого отрезка PQ и найдите огибающую.

5. Найдите множество середин отрезков, у которых один конец лежит на одной данной окружности, а другой — на другой данной окружности (радиусы окружностей разные).

6*. По данным прямым AB и AC двигаются вершины D и E двух острых углов жёсткого прямоугольного треугольника DEF. Какова траектория точки F в зависимости от градусной меры угла A?

7. Даны фиксированный отрезок AB и подвижная точка C вне его. Точки D и E — вершины прямоугольных равнобедренных треугольников CAD и CBE (см. рисунок). Постройте множество отрезков DE и найдите их общее свойство.



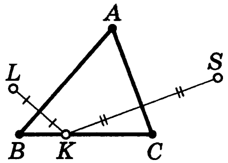
Занятие 6

1 (ч). Две окружности равного радиуса касаются друг друга в точке K. Стороны прямого угла с вершиной K пересекают одну окружность в точке A, а другую — в точке B. Что в этой конструкции сохраняется при движении точки A по окружности?

2. Через точку M пересечения медиан треугольника ABC проходит прямая p. Расстояния от вершин A, B и C до этой прямой равны a, b и c соответственно. Найдите связь между a, b и c.

Указания. В каждой задаче надо построить подвижный чертёж, обнаружить элементы или величины, которые при движении чертежа остаются неизменными (длины отрезков, углы) или связаны между собой соотношением (равны, лежат на одной прямой и т. д.), и доказать это.

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка K. Точку K отразили относительно прямых AB и AC и получили точки L и S соответственно (см. рисунок). Укажите две равные стороны четырёхугольника $ASKL$ и два угла, которые не меняются при движении точки K по отрезку BC.



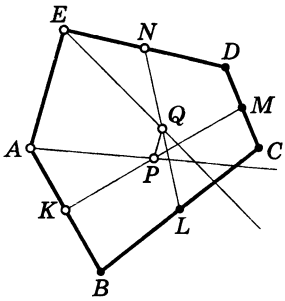
4. На сторонах угла A, равного $60°$, отмечены точки B и C. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BE и CH. Рассматривая все отрезки, задаваемые точками A, B, C, E, H, найдите равные отрезки и постоянные углы при движении точек B и C.

5. Пусть D — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Определите вид четырёхугольника с вершинами в серединах сторон четырёхугольника $ABDC$ в зависимости от величины угла A.

6. Прямая p проходит через вершину A параллелограмма $ABCD$, причём параллелограмм лежит по одну сторону от данной прямой. Расстояния от вершин B и D до прямой p равны b и d. Найдите расстояние от вершины C до прямой p.

7. Известно, что если на сторонах квадрата наружу построить четыре квадрата, то их центры окажутся вершинами квадрата. На сторонах каких ещё выпуклых четырёхугольников можно построить наружу четыре квадрата так, что их центры также будут вершинами квадрата?

8. В произвольном пятиугольнике $ABCDE$ соединили отрезком середины сторон AB и CD, а также середины сторон BC и DE. Середины двух полученных отрезков P и Q снова соединили. Провели лучи AP и EQ (см. рисунок). Точки A и E двигаются произвольным образом. Найдите свойства отрезка PQ.



Занятие 7

1. Даны прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. а) Постройте на прямой m такую точку M, чтобы сумма $AM + MB$ была наименьшей. б) Постройте на прямой m отрезок CD заданной длины так, чтобы длина ломаной $ACDB$ была наименьшей.

2 (ч). Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC. При каком положении точки M длина отрезка PQ максимальна?

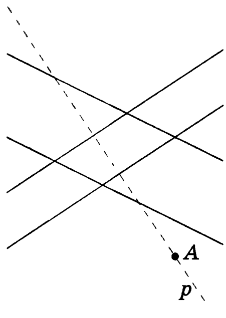
3. (Вариант попроще.) На стороне острого угла с вершиной A дана точка B. Постройте на другой его стороне такую точку X, чтобы радиус описанной окружности треугольника ABX был наименьшим.

(Вариант посложнее.) Дан треугольник ABC. Найдите на прямой AB такую точку M, для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM будет наименьшей.

4. По разные стороны от реки расположены две деревни. Постройте перпендикулярно берегам реки мост так, чтобы Вася прошёл наименьший путь из одной деревни в другую, к себе домой. (Берега реки — две параллельные прямые, деревни — точки.)

5. Внутри окружности с центром O дана точка A. Найдите на окружности точку M, для которой угол OMA наибольший.

6. Даны две пары параллельных прямых и точка A (см. рисунок). Проведите через точку A прямую p так, чтобы отрезки, высекаемые на ней параллельными прямыми, были равны.



7. Заданы длины диагоналей четырёхугольника и угол между диагоналями. При каком взаимном расположении диагоналей периметр четырёхугольника будет наименьшим?

8*. Дан квадрат. Проведите в его плоскости прямую так, чтобы сумма *квадратов* расстояний от вершин квадрата до прямой была минимальна.

Занятие 8

1. На сторонах треугольника ABC наружу построены квадраты $ABKP$ и $BCGF$. Изучите взаимосвязь *отрезков* AF и KC, а также взаимное расположение *прямых* AF, KC и PG.

2. На сторонах треугольника ABC наружу построены квадраты $ABKP$ и $BCGF$. Отмечены точки I — середина отрезка AC и J — середина отрезка KF, а также центры квадратов O и R соответственно. Определите вид четырёхугольника $OIRJ$.

3 (ч). Для каждой точки B полуокружности с диаметром AC (точка B отлична от точек A и C) на сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне треугольника квадраты. Найдите множество середин M отрезков, соединяющих центры этих квадратов.

4. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями. Постройте такую прямую p_1, не совпадающую с AB, чтобы выполнялось равенство $AK = AL$.

5. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями. Найдите множество середин отрезков KL при всех возможных p.

(Подсказка. Проведите радиусы окружностей в точки K и L соответственно.)

6. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями. Постройте такую прямую p_2, чтобы длина отрезка KL была максимальна.

Занятие 8

Список задач в виде, удобном для индивидуального решения.

1. На сторонах треугольника ABC наружу построены квадраты $ABKP$ и $BCGF$.

а) Изучите взаимосвязь отрезков AF и KC, а также взаимное расположение прямых AF, KC и PG.

б) Отмечены точки I — середина отрезка AC и J — середина отрезка KF, а также центры квадратов O и R соответственно. Определите вид четырёхугольника $OIRJ$.

в) Вершина B лежит на полуокружности с диаметром AC (точка B отлична от точек A и C). Найдите множество середин отрезков, соединяющих центры квадратов.

2. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной прямой p, проходящей через точку A, обозначим через K и L другие точки пересечения этой прямой с данными окружностями.

а) Постройте такую прямую p_1, не совпадающую с AB, чтобы выполнялось равенство $AK = AL$.

б) Найдите множество середин отрезков KL при всех возможных p. (Подсказка. Проведите радиусы окружностей в точки K и L соответственно.)

в) Постройте такую прямую p_2, чтобы длина отрезка KL была максимальна.

Оглавление

В СЕРИИ «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ» ВЫШЛИ КНИГИ:

А. Д. Блинков. Последовательности

Ю. А. Блинков, Е. С. Горская. Вписанные углы

К. А. Кноп. Азы теории чисел

А. Д. Блинков. Геометрия в негеометрических задачах

И. В. Раскина
Логика для всех: от пиратов до мудрецов

А. В. Шаповалов. Математические конструкции: от хижин к дворцам

А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц. Непрерывность

И. В. Раскина, Д. Э. Шноль. Логические задачи

А. А. Заславский, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов
Задачи о турнирах

А. В. Шаповалов. Как построить пример?

А. И. Сгибнев. Делимость и простые числа

А. Д. Блинков. Классические средние

Г. А. Мерзон, И. В. Ященко. Длина. Площадь. Объем

К. А. Кноп.
Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам

А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков.
Геометрические задачи на построение

П. В. Чулков. Арифметические задачи

В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина. Графы

Л. Э. Медников. Чётность

ISBN 978-5-4439-1358-2

9 785443 913582